

2019 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010027

參展科別 數學

作品名稱 旋轉方塊路橋問題之探討

得獎獎項 大會獎：四等獎

就讀學校 臺北市立第一女子高級中學

指導教師 廖培凱

作者姓名 蔣馨慧

關鍵詞 卡特蘭數、遞迴關係、生成函數

作者簡介



我是蔣馨慧，來自台北市，目前就讀北一女中三年級。很榮幸能夠參加這場盛會，和大家互相交流、切磋。在探索遊戲模型時，能夠幸運地和數學交會，是我至今最大的幸福。儘管研究中偶遇瓶頸，但這兒的數學卻少了點考試的壓力，多了些追根究柢的精神。在反覆研究中，自己也看見了數學不一樣的面貌。希望大家也都能在生活中享受數學的樂趣。

摘要

本研究為一迷宮遊戲和旋轉方塊所組合成的問題。在給定行列數的可旋轉方塊上，置入「路」和「橋」，指定起點，並透過方塊的旋轉改變路徑，探討所有可能到達的終點以及抵達各終點的最短路線數。

此研究中，首先透過問題簡化和圖形討論，發現旋轉方塊以迴圈和無法繞行的路線（構造 S）交錯形成，得到所有可能的終點位置。接著，整理所有簡化圖形的規律，利用加法原理推算出最短路線數。透過找出圖形對稱特性，得到不同終點之最短路徑數的關係。而後將不同規格的旋轉方塊的最短路線數關係，以遞迴關係式表示，並且找出其生成函數，希望透過生成函數得到最短路徑數的一般式。研究時，我們不僅發現不同規格之最短路線數生成函數的關係，從而能探討每一規格的最短路線數。更進一步發現無論方塊行數取至極限時或方塊行列數相同時，其最短路徑數的數列與卡特蘭數列（the Catalan numbers）有關。

Abstract

This study is based on the combination problem of mazes and rotating bricks in which we hope would spark a more challenging game. As we created the rotating bricks, we inserted roads, defined bridges, and assigned the starting point. While the rotation of bricks alters the routes, this study discussed the possibility of the ending point and the number of the shortest routes in different scales to reach each destination.

In this study, we first transformed the complicated model of roads and bridges into arrows. Through graphs simplification, we could also summarize our problems of the possible ending points. In addition, as we discovered structure S (certain routes in which one point in it could not reach the other point on its diagonal side) and loops, we were able to confirm where the possible ends are.

Next, we drafted down different scales of the model and learned their patterns. Through symmetrical changes of graphs, we proved the relation in the shortest routes to each destination and continued our study by discussing only one destination. We estimated the number of the shortest routes with addition principle and learned their recurrence relations using Mathematical Induction. Furthermore, we also hypothesized their generating functions to learn their power series and found the formula of each shortest routes. With mathematical induction, we learned the recurrence relation of different scales and could calculate the shortest routes to each destination in each scale.

At the end of our study, we also found that whenever the scale reaches the infinity or the column and the row are identical, the sequence of the shortest routes relates to the Catalan numbers.

壹、前言

一、研究動機

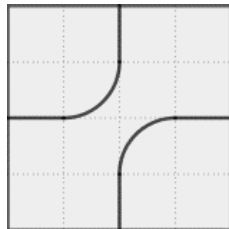
透過將相鄰方塊特定稜邊連接，如【圖一】。而市面上亦常見迷宮桌遊供孩童開發腦力，如【圖二】。其透過道路組合（如【圖三】）設計迷宮，讓給定的起點和終點有可行的路線。為增加其挑戰性，我們結合兩者設計旋轉方塊，如【圖四】。然而，為設計遊戲，我們便需要知道如何給定起點、終點以及如何編排道路。因此，此研究即想瞭解不同規格的旋轉方塊上，若給定起點，終點位置所在及其最短路線方法數分別為何。



【圖一】相鄰方塊以一稜邊相接。旋轉一個時，其餘會一起旋轉。



【圖二】可改變路線的桌遊迷宮遊戲
《MAGIC FOREST》



【圖三】道路



【圖四】旋轉方塊：將【圖一】與迷宮
遊戲結合成可移動的迷宮遊戲。

二、研究目的及研究問題

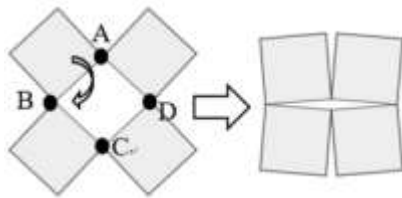
- (一) 探討旋轉方塊中，可做為終點的位置。
- (二) 探討旋轉方塊中，由起點到各終點的最短路線方法數。
- (三) 探討旋轉方塊中，最短路線數的遞迴關係與生成函數。

貳、 研究方法與過程

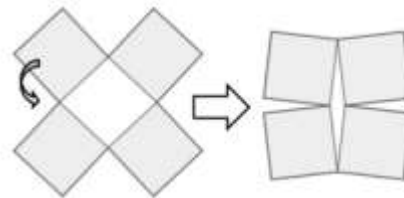
一、 名詞定義與規則

(一) 土地：以此命名每一個方塊。

1. 規格：橫向為列，縱向為行，命第一列第一行的土地為 B_{11} 。以 $m \times n$ 階土地表示旋轉方塊土地有 m 行、 n 列。其中僅討論 $m, n \geq 2$ 。
2. 轉動：以左上角方塊的旋轉方向形容整個模型的轉動。由於其相接點（如圖的 A、B、C、D 點）不可分離，得知模型可以順、逆時針旋轉。如下圖 2×2 階土地：



【順時針旋轉】

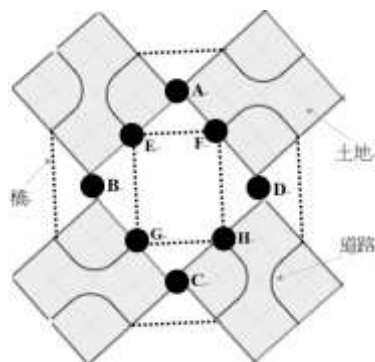


【逆時針旋轉】

(二) 道路：土地上的線為道路，其中路線以縱向道路開始。如【圖五】。不同土地上的道路排列依序以縱向、橫向交錯。在本作品中，左上角土地的道路為縱向。

(三) 橋：

土地旋轉使道路連接，過程中連結兩道路的端點線段稱為「橋」。如【圖五】中，順時針旋轉後，點 E 連接點 G，等同在 E、G 兩點間畫一條虛線連結。此虛線即為「橋」。同理在點 F 和點 H 亦然。因此討論圖形如【圖五】。

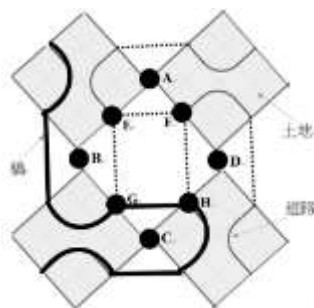


【圖五】

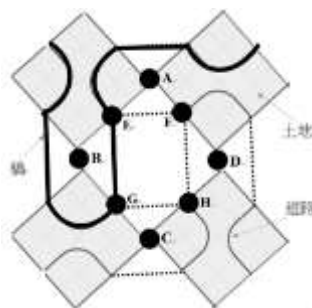
(四) 起點、終點與移動規則

1. 起點：每塊土地上的道路端點，經過土地旋轉，均無法再和相鄰土地上的道路連接者，可做為起點。在後續觀察中，我們得知位於旋轉方塊左上角、右上角、左下角和右下角的點可做為起點。而在本作品中，我們令左上角的道路端點為「起點」。
2. 移動規則：移動時，只能沿著道路或橋移動，且不可重複已經過的路徑。離開一道路後，可以順時針或逆時針旋轉，但必須在一次旋轉後進入另一條道路。因此必須「路橋相間」地移動。
3. 終點：由起點出發，依照移動規則，經過土地旋轉，無法再和相鄰土地上的道路連結的道路端點，稱為「終點」。

以 2×2 階旋轉方塊為例。在點 G 若選擇橫向的橋通往點 H，可移動到左下角的終點，如【路線一】。而在點 G 若選擇縱向的橋通往點 E，則可到達右上角的終點，如【路線二】。



【路線一】

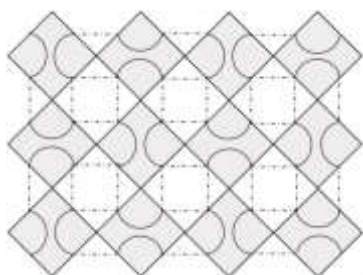


【路線二】

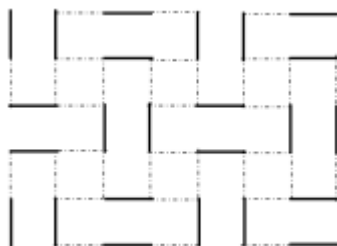
二、觀察與發現

為方便討論，我們首先省略土地邊界，分別以實線和虛線表示路和橋，如【圖六】。由於不可重複已經過的路徑，我們將每條道路以一點表示，並命名每塊土地 B_{mn} 中左下角的點為 L_{mn} 、右上角的點為 R_{mn} ，以其分別代表兩條道路。如【圖七】中， B_{11} 內左下角的點為 L_{11} 、右上角的點為 R_{11} 。因移動規則，我們可畫出連接兩點的箭頭方向，而往後說明書中的討論我們皆以左下點 L_{mn} 和右上點 R_{mn} 連接圖表示整體圖形，如【圖八】。

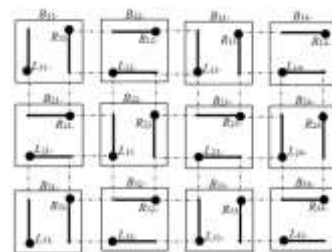
另外，由於路和橋的連接，可知位於右上角的 R_{1n} 、左下角的 L_{m1} 、以及右下角 R_{mn} （當 $m+n$ 為偶數時）或 L_{mn} （當 $m+n$ 為奇數時）等三點有機會成為終點。因此，我們將問題簡化為：「在 $m \times n$ 階旋轉方塊中，以 L_{11} 為起點， R_{1n} 、 L_{m1} 、 R_{mn} 或 L_{mn} 等三點是否能為終點」。



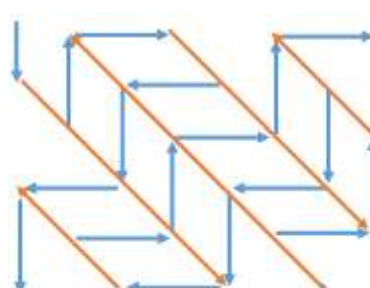
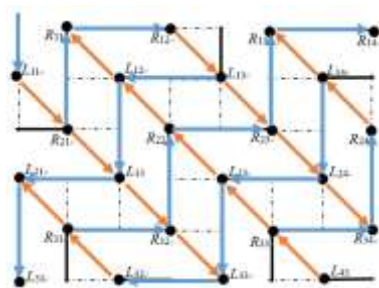
【旋轉方塊初始圖】



【圖六】省略土地邊界



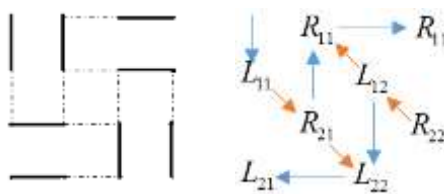
【圖七】左下右上點示意圖



【圖八】左下右上點連接圖

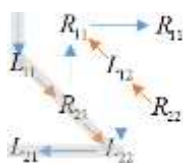
三、終點位置

(一) 2×2 階旋轉方塊

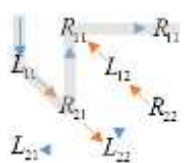


【圖九】

由【圖九】可知，通往右上角終點 R_{12} 有一路線： $L_{11} R_{21} R_{11} R_{12}$ 【路線一】；通往左下角終點 L_{21} 有一路線： $L_{11} R_{21} L_{22} L_{21}$ 【路線二】。



【路線一】



【路線二】



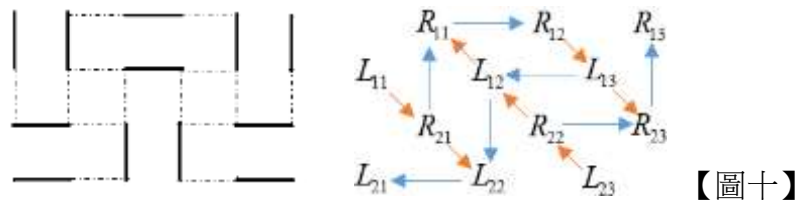
【構造 S】

而通往右下角終點 R_{22} 則得知：由 L_{11} 出發必經 R_{21} ， L_{12} 是通往終點 R_{22} 的必經點。但因行走方向唯一，無法由 R_{21} 走至 L_{12} 。因此由 L_{11} 出發無法到達終點 R_{22} 。

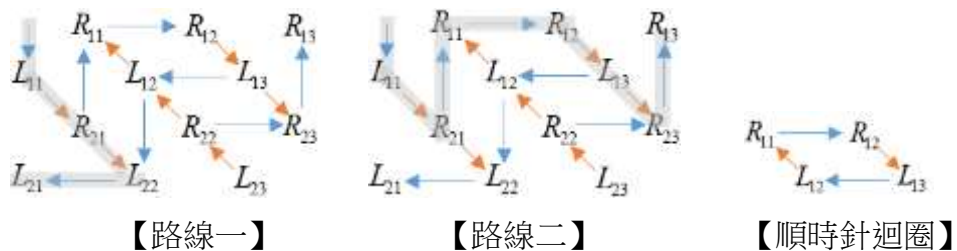
結論：在 2×2 階旋轉方塊中，由 L_{11} 出發為起點，終點只能是 R_{12} 或 L_{21} 。

為方便之後的討論，命名由四個兩兩相連的箭頭組成的四邊形為構造 S ，如四邊形 $R_{11}R_{21}L_{22}L_{12}$ 為一構造 S 。由於構造 S 中，兩兩箭頭若非來自同一點即是指向同一點，因此任一點無法走到其對角線上的另一點。例如： R_{21} 無法走至 L_{12} 。

(二) 2×3 階旋轉方塊



由【圖十】可知，通往右上角終點 R_{13} 有一路線： $L_{11} R_{21} R_{11} R_{12} L_{13} R_{23} R_{13}$ 【路線一】；通往左下角終點 L_{21} 有一路線： $L_{11} R_{21} L_{22} L_{21}$ 【路線二】。



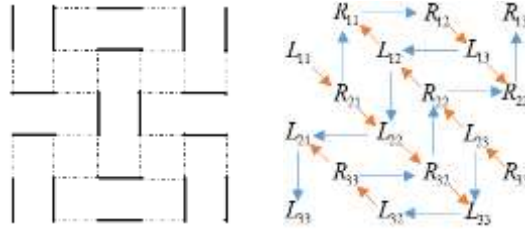
而通往右下角終點 L_{23} 時，除了構造 S ，還發現一順時針迴圈 $R_{11} R_{12} L_{13} L_{12}$ 。我們定義如迴圈，由任意點進入後，可不更改運行方向地沿著迴圈路徑重回此點，亦可離開此迴圈。由於遊戲限制不可重複已經路徑，因此箭頭為單一方向。如四邊形 $R_{11}R_{12}L_{13}L_{12}$ 等為迴圈。

我們可以觀察到【圖十】中有兩個構造 S ： $R_{11} R_{21} L_{22} L_{12}$ 和 $L_{12} R_{22} R_{23} L_{13}$ 及一個順時針迴圈 $R_{11} R_{12} L_{13} L_{12}$ 。此迴圈僅能由 R_{11} 進入。由圖得知，與終點 L_{23} 相連的點唯有 R_{22} ；而其餘與 R_{22} 相鄰的點只有 L_{12} 和 R_{23} 。由於 L_{12} 和 R_{23} 位於同一順時針迴圈，所以只有經過 L_{13} 才能抵達 L_{12} 和 R_{23} 。但因為 $L_{12} R_{22} R_{23} L_{13}$ 為一構造 S ，因此經過 L_{13} 後，無法抵達位於對角線上的 R_{22} 。即未有路線抵達 R_{22} ，無法以 L_{23} 為終點。

結論：在 2×3 階旋轉方塊中，由 L_{11} 出發為起點，終點只能是 R_{13} 或 L_{21} 。

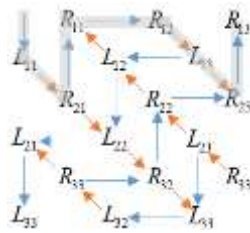
(三) 3×3 階旋轉方塊

由【圖十一】可發現三個迴圈，分別是兩個順時針迴圈 $R_{11} R_{12} L_{13} L_{12}$ 、 $R_{31} R_{32} L_{33} L_{32}$ 及一個逆時針迴圈 $L_{12} L_{22} R_{32} R_{22}$ 。

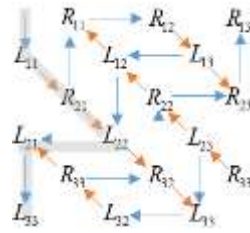


【圖十一】

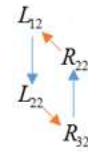
以 L_{11} 為起點，通往右上角終點 R_{13} 有一條路線： $L_{11} R_{21} R_{11} R_{12} L_{13} R_{23} R_{13}$ 【路線一】；通往左下角終點 L_{31} 有一條路線： $L_{11} R_{21} L_{22} L_{21} L_{31}$ 【路線二】。



【路線一】



【路線二】



【逆時針迴圈】

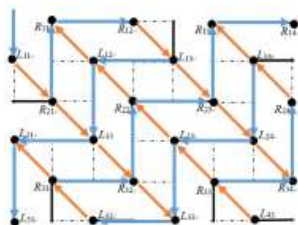
而我們無法以 R_{33} 為終點，說明如下：

以 L_{11} 為起點出發後必經 R_{21} ，而接續 R_{21} 可行經 R_{11} 或 L_{22} 。但無論行經上述兩點，若不接續走路線一或路線二，都會進入一順時針迴圈。且一進入迴圈後，即會通往下個迴圈。舉例而言：從 R_{21} 選擇行經 R_{11} 進入迴圈 $R_{11} R_{12} L_{13} L_{12}$ 後，在 L_{13} 、 L_{12} 都會遇到兩條路線的選擇。而 L_{13} 、 L_{12} 的兩條路線中皆有一條持續在所在迴圈內；對於另一條，選擇 L_{13} 會走路線一，選擇 L_{12} 則會通往下個迴圈 $L_{12} L_{22} R_{32} R_{22}$ 。接續討論後者情況，進入第二個迴圈後，迴圈內四點都需選擇兩條路線；一條將持續在所在迴圈內；對於另一條， R_{22} 、 L_{22} 分別接續到終點 R_{13} 、 L_{31} 。而 L_{12} 、 R_{32} 則分別通往前個及下個迴圈。以此類推，可知因為迴圈，無法抵達終點 R_{33} 。

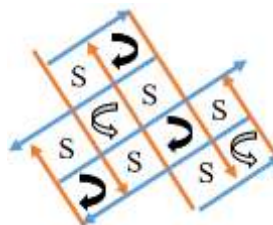
結論：在 3×3 階旋轉方塊中，由 R_{11} 出發為起點，終點只能是 R_{13} 或 L_{31} 。

(四) 構造 S 和迴圈關係

為求圖形簡便，在往後的說明書中，我們將左下、右上點連接圖中的橘線和藍線拉直，只留下上、下向排列的橘色箭頭和左、右向排列的藍色箭頭。



【左下右上點連接圖】



【圖十二】

在拉直的路線中，我們可找到構造 S 和迴圈，如【圖十二】。我們由圖得知旋轉方塊是由順時針迴圈和逆時針迴圈交錯、構造 S 連結組成。且由 L_{11} 出發進入迴圈後，除非延續【路線一】通往右上角終點 R_{1n} ，或延續【路線二】通往左下角終點 L_{m1} ，否則必定進入下一個迴圈。

(五) $m \times n$ 階旋轉方塊

由以上 2×2 、 2×3 、 3×3 階旋轉方塊的討論，得知從起點 L_{11} 出發，無法到達各自的右下角終點 R_{22} 、 L_{23} 及 R_{33} 。故猜測在 $m \times n$ 階旋轉方塊中，從起點 L_{11} 出發無法以右下角為終點。

定理 1：在 $m \times n$ 階旋轉方塊中，由 R_{11} 出發為起點，終點只能是 R_{1n} 或 L_{m1} 。

證明：

Claim：由 R_{11} 出發可以分別以 R_{1n} 、 L_{m1} 為終點。

由 3×3 階旋轉方塊的討論，得知從 L_{11} 出發可到達終點 R_{13} ，並求出一條【路線一】，此路線接續 2×2 階和 2×3 階旋轉方塊的【路線一】。根據旋轉方塊只能以順、逆時針方向轉動 90° 的性質，可知 $m \times n$ 階旋轉方塊中的【路線一】為 $L_{1t} R_{2t} R_{1t} R_{1(t+1)}$ ， $t = (1, 3, 5, 7, \dots)$ ，且其終點必為 R_{1n} 。

同理，可求得在 $m \times n$ 階旋轉方塊中，必有【路線二】達終點必為 L_{m1} 。其路線為

$$L_{t1} R_{(t+1)1} L_{(t+1)2} L_{(t+1)1}, t = (1, 3, 5, 7, \dots)。$$

Claim：由 L_{11} 為起點出發無法以右下角為終點。

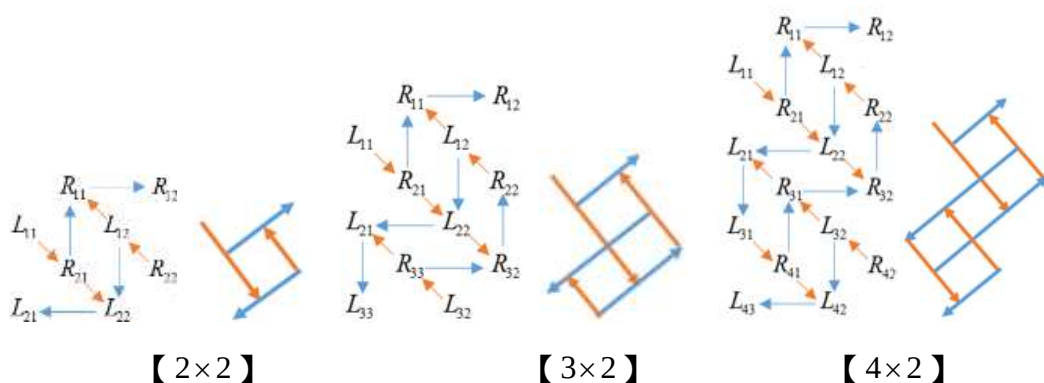
我們藉由構造 S 和迴圈關係可得知，由 L_{11} 出發，進入迴圈後，除非是通往 R_{1n} 或 L_{m1} 的路線一或路線二，否則必定進入下個迴圈。因此由 L_{11} 出發無法以 R_{mn} ($m+n$ 為偶數時)或 L_{mn} ($m+n$ 為奇數時)為終點。 ■

四、最短路線數方法數

已知在 $m \times n$ 階旋轉方塊中，以 L_{11} 為起點時，終點只能是 R_{1n} 或 L_{m1} 。於是接續我們想要探討抵達 R_{1n} 與 L_{m1} 的最短路線數方法數。

(一) 圖形觀察

1. $m \times 2$ 階旋轉方塊路線

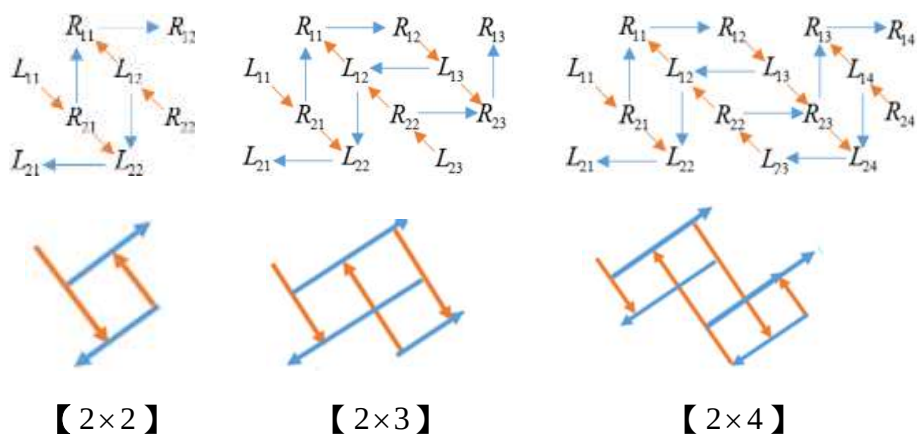


$(m+1) \times 2$ 階旋轉方塊比 $m \times 2$ 階旋轉方塊多兩個方框，分別為迴圈和構造 S 。

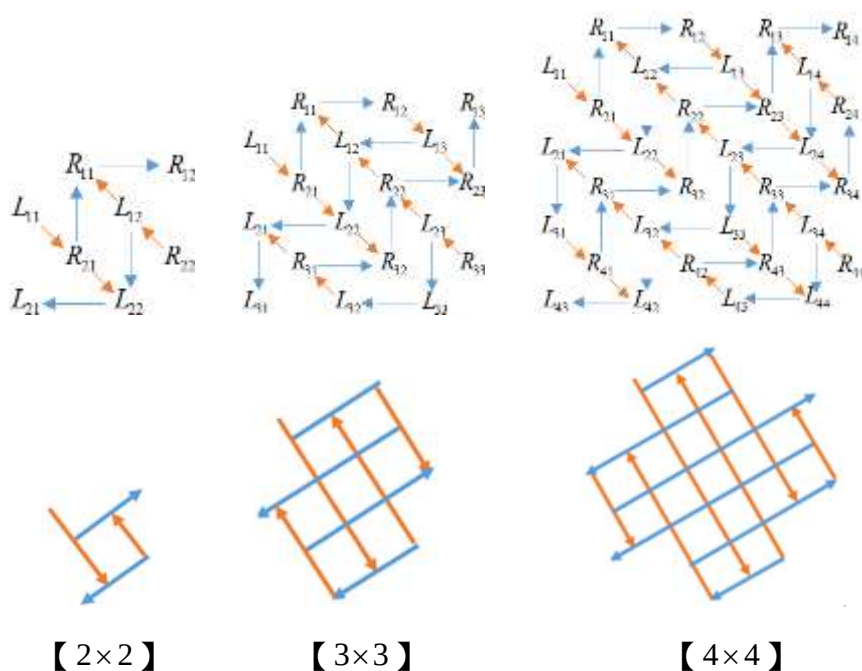
另外，終點 L_{m1} 位置隨 m 的奇、偶變換呈下、上不同。而終點 R_{1n} 位置則恆於起點之右側。

2. $2 \times n$ 階旋轉方塊路線

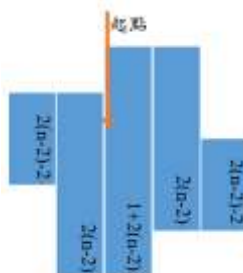
$2 \times (n+1)$ 階旋轉方塊比 $2 \times n$ 階旋轉方塊的圖形多兩個格子，分別為迴圈和構造 S 。另外，終點 L_{21} 位置恆於第一層方框左下側。而終點 R_{1n} 位置則隨 n 的奇、偶變換呈上、下不同。



3. $n \times n$ 階旋轉方塊路線

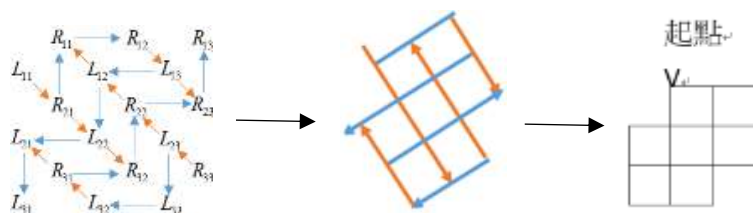


在 $n \times n$ 階旋轉方塊中，可得簡化圖形規律：含起點以下的直行（中間直行）中，格子數共有 $1+2(n-2)$ 個，接著格子數分別向左、向右遞減。鄰近中間直行的直行格子數有 $2(n-2)$ 個。接著每向外一直行，即減少兩個格子（ $2(n-2)-2, 2(n-2)-4, \dots, 0$ ）。同時，圖形由中間直行向左、向右之行格，分別輪流對其鄰近行格上下對齊，如下圖：

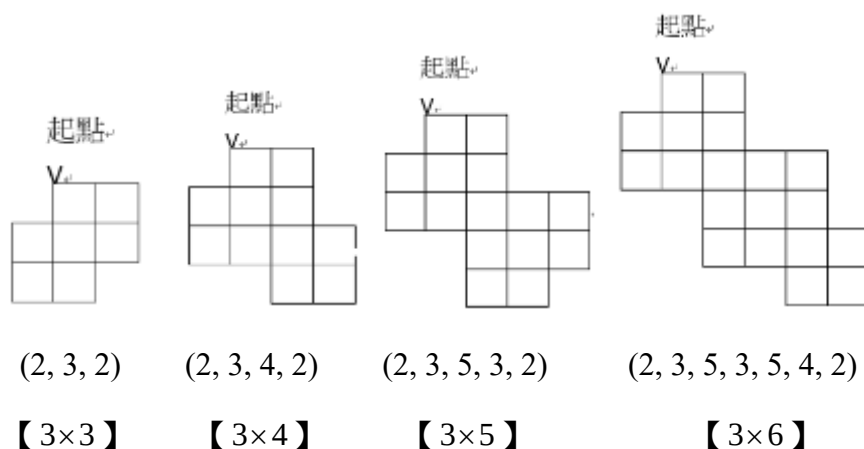


4. $m \times n$ 階旋轉方塊路線

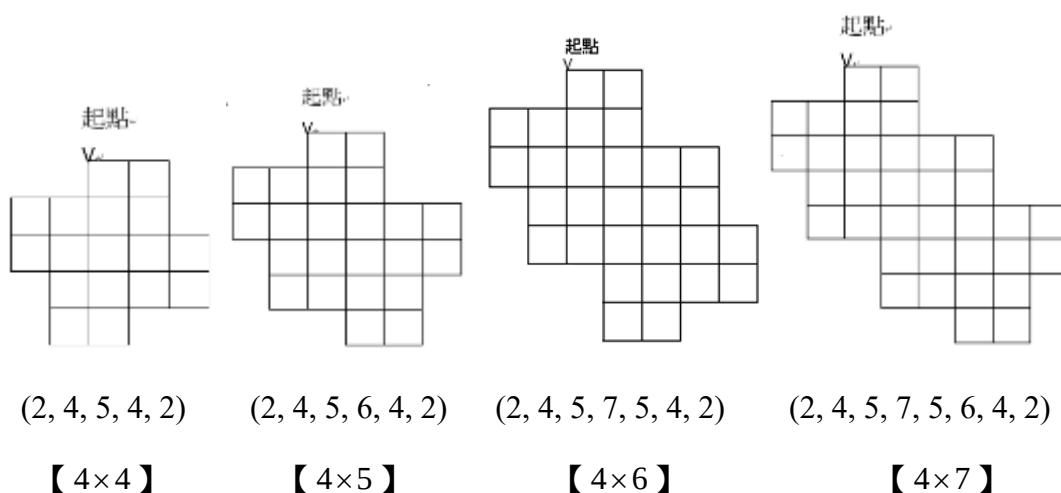
以 $n \times n$ 階旋轉方塊作為起始觀察 $m, n > 2$ 且 $m \neq n$ 的情況，便可以得到所有圖形簡化後的規律。

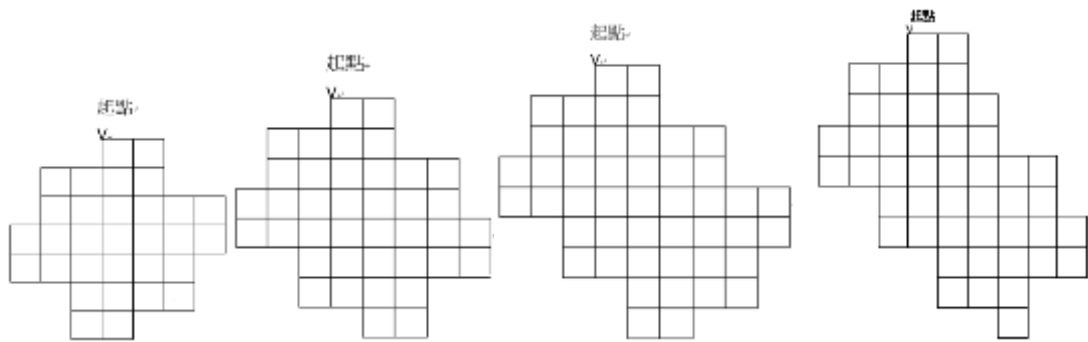


以 $3 \times n$ 階旋轉方塊為例，將每一直行的格子數由左至右表示，可得到下圖：



在 $4 \times n$ 、 $5 \times n$ 階旋轉方塊中，可經由觀察得知不同情況下每行格子數如下：





(2, 4, 6, 7, 4, 2) (2, 4, 6, 7, 8, 6, 4, 2) (2, 4, 6, 7, 9, 7, 6, 4, 2) (2, 4, 6, 7, 9, 7, 8, 6, 4, 2)

【5×5】

【5×6】

【5×7】

【5×8】

透過觀察，我們可以發現在 $n \times (n+k)$ 階旋轉方塊中，中間直行以及其以左直行的格子數相同於 $n \times n$ 階旋轉方塊，即中間直行格子數有 $2(n-2)+1$ 個，鄰近中間直行以左先向下對齊有 $2(n-2)$ 個格子。接著每向外一行，即減少兩個格子（ $2(n-2)-2$ 、 $2(n-2)-4 \dots$ ），分別向上、向下對齊，直到 $2(n-2)-2(n-2)=0$ ，左邊圖形結束。

接著討論中間直行右側。 $n \times (n+1)$ 階旋轉方塊時，先向上對齊，直行中有 $2(n-2)+2$ 個格子；接續每向外一行依序以向下、向上規律對齊，格子數減少兩個（ $2(n-2)$ 、 $2(n-2)-2, \dots, 0$ ）。而 $n \times (n+2)$ 階旋轉方塊時，則是先向上對齊 $2(n-2)+3$ 個格子，其次減兩格往外有 $2(n-2)+1$ 個格子，再往外有 $2(n-2)$ 個格子，其後每向外一行依序以向下、向上規律對齊，且格子數減少兩個直到微零：（ $2(n-2)-2$ 、 $2(n-2)-4, \dots, 0$ ）。

於是我們可以整理以下規律：

	V 起點	
2 4 ... $2n-6$ $2n-4$	$\boxed{2n-3 \ 2n-4 \ 2n-6} \dots$	4 2 $n \times n$
2 4 ... $2n-6$ $2n-4$	$\boxed{2n-3 \ 2n-2 \ 2n-4 \ 2n-6} \dots$	4 2 $n \times (n+1)$
2 4 ... $2n-6$ $2n-4$ $2n-3$ $2n-1$	$\boxed{2n-3 \ 2n-4 \ 2n-6} \dots$	4 2 $n \times (n+2)$
2 4 ... $2n-6$ $2n-4$ $2n-3$ $2n-1$	$\boxed{2n-3 \ 2n-2 \ 2n-4 \ 2n-6} \dots$	4 2 $n \times (n+3)$

因此我們得到 $n \times (n+k)$ 階旋轉方塊的兩種情況。當 k 為奇數時，

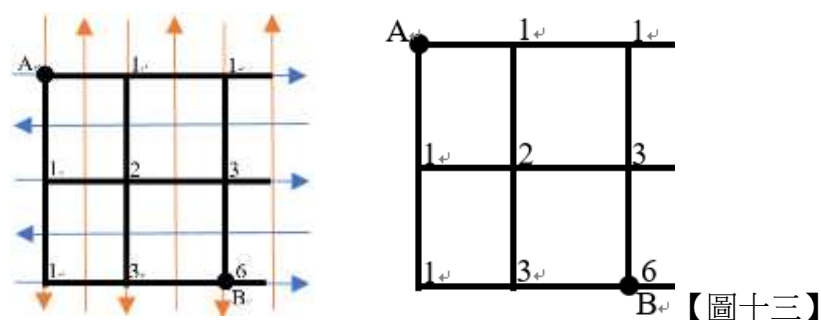
	起點	$k-1$ 組	$2n-1 \ 2n-3$	
	V			
2 4 ... $2n-6$ $2n-4$ $2n-3$	$\overbrace{2n-1 \ 2n-3 \dots 2n-1 \ 2n-3}$		$2n-4 \ 2n-6 \dots 4 \ 2$	

又 k 為偶數時

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & & & & & & \text{起點} & & & & k-1 \text{組} & & 2n-1 & 2n-3 & & & \\ & & & & & & \downarrow & & & & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & & & \\ 2 & 4 & \dots & 2n-6 & 2n-4 & 2n-3 & 2n-1 & 2n-3 & \dots & 2n-1 & 2n-3 & 2n-2 & 2n-4 & 2n-6 & \dots & 4 & 2 \end{array}$$

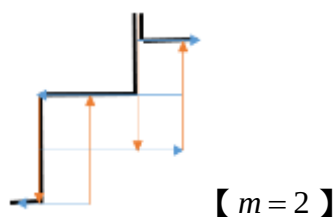
(二) 最短路線數討論

由於要走「最短路線」，所以透過簡化的圖形，如【圖十三】中 A 點走至 B 點時，就不需考慮往上和往左的路線。其最短路線方法數便可經排列組合的加法原理，得到 A 點至 B 點的最短路線方法數為 6。(說明書內以「最短路線數」簡稱最短路線方法數。) 已知終點僅有 R_{1n} 和 L_{m1} ，因此在 $m \times n$ 接旋轉方塊中，令由起點 L_{11} 到 R_{1n} 的最短路徑路線方法數為 r_{mn} ；由 L_{11} 到 L_{m1} 的最短路徑路線方法數為 l_{mn} 。



(三) l_{m2} 、 r_{m2}

由已知圖形得知計算 r_{m2} 時，我們可省略向左及向上箭頭，只看向右和向下的部分；而計算 l_{m2} 時，則省略所有向右及向上線段，只看向左和向下的箭頭，在下圖中，黑色路線即為在兩情況內的最短路線，可得知 $l_{m2} = r_{m2} = 1$ 。

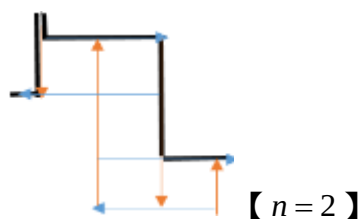


結論： $l_{m2} = r_{m2} = 1$ 。

(四) l_{2n} 、 r_{2n}

由已知的圖形可知在計算 r_{2n} 時，我們省略所有向左及向上線段，只看向右和向下的部分；而計算 l_{2n} 時，則省略所有向右及向上線段，只看向左和向下的部

分。下圖路線即是在兩情況內的最短路線，並可得 $l_{2n} = r_{2n} = 1$ 。



結論： $l_{2n} = r_{2n} = 1$ 。

(五) r_{mn} 和 l_{mn} 的關聯

在 $m \times 2$ 、 $2 \times n$ 階旋轉方塊的最短路線圖形中，我們發現了兩者圖形和最短路線數的相似性，於是著手探究 $m \times t$ 、 $t \times n$ 階旋轉方塊的最短路線數的關聯。利用窮舉

(如表) 進行觀察，發現 $m \times t$ 階土地時， $r_{t(m-1)} = l_{mt}$ 。

$m \backslash n$	2	3	4	5	6	7
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1	2	2	2	2	2
5	1	2	2	2	2	2
6	1	4	5	5	5	5
7	1	4	5	5	5	5
8	1	8	13	14	14	14

【 l_{mn} 】

$m \backslash n$	2	3	4	5	6	7
2	1	1	1	1	1	1
3	1	2	2	4	4	8
4	1	2	2	5	5	13
5	1	2	2	5	5	14
6	1	2	2	5	5	14
7	1	2	2	5	5	14
8	1	2	2	5	5	14

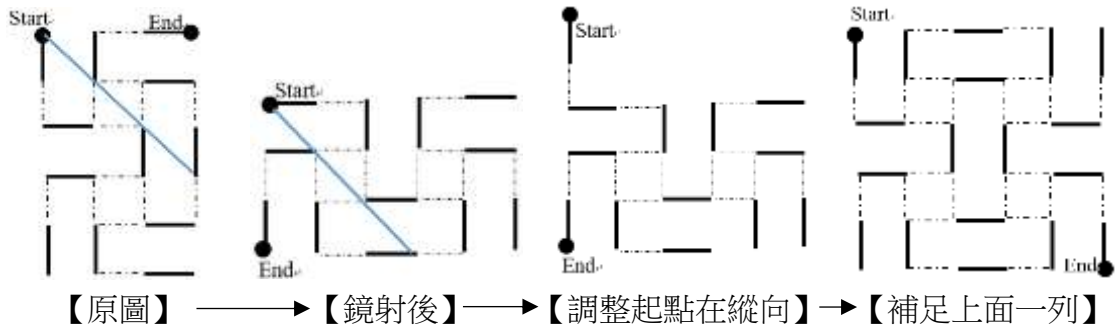
【 r_{mn} 】

定理 2： $r_{mn} = l_{(n+1)m}$ 。

證明：

在 $m \times n$ 階旋轉方塊中，觀察起點 L_{11} 到終點 R_{1n} 的最短路線和到另一位置終點的關係。為使起點討論位置不變，因此如下圖過起點沿對角線做對稱。然而，因對稱後起點落於橫向道路上，我們在起點上方再補一條縱向的路徑。又因補一條縱向路徑並不會增加起點到終點的最短路線數，因此可把剩餘空缺部分補足，即在原本圖形上方

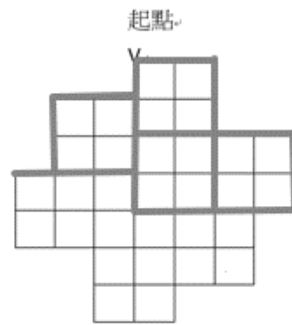
再增加一列旋轉方塊。故在 $m \times n$ 階旋轉方塊中，起點到終點 R_{1n} 的路徑等同於在 $(n+1) \times m$ 階旋轉方塊時，起點到終點 $L_{(n+1)1}$ ，得 $r_{mn} = l_{(n+1)m}$ 。■



(六) r_{nn} 、 l_{nn} 的討論

1. 歸納證明 r_{nn} 、 l_{nn} 遞迴關係

已知在計算 $n \times n$ 階旋轉方塊的最短路線數時，我們不需要看所有格子而可省略特定方向箭頭。如計算 r_{nn} 時，我們只需要保留終點以上向右和向下的箭頭；計算 l_{nn} 則僅保留終點以上向左和向下的箭頭。最終圖形如【圖十四】方框。

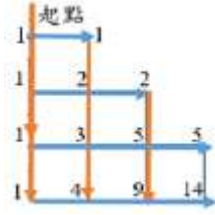


【圖十四】

我們首先討論 l_{nn} ，其圖形在起點以下向左一行有 $n-2$ 個方框，且因圖形變化可知當 n 為偶數時， l_{nn} 與 $l_{(n+1)(n+1)}$ 相同（例如 l_{22} 和 l_{33} 相同）。接著討論 r_{nn} ，其圖形中，在起點以下向右一行有 $n-1$ 個方框，且當 n 為奇數時， r_{nn} 與 $r_{(n+1)(n+1)}$ 亦相同。

接著，我們尋找其遞迴關係式。經【圖十五】觀察 r_{nn} ，在向下和向右的路線中，經加法原理計算到達每一個交點的最短路線數。由於每一列最後兩個數

字相同，故將每一列最外一個重複數字省略，得【圖十六】。令第 s 列第 t 個數為 a_{st} 。當 $s < t$ ， a_{st} 不取值；當 $s \geq t$ 時，討論 $m \times n$ 階旋轉方塊時，加入上標表示為 $a_{st}^{(m)}$ ，如【圖十七】。因此可知，當 a_{st} 排成的陣列呈以下三角形時，或說每一行的項數沒有限制、即 $m \rightarrow \infty$ 時， $a_{tt}^{(\infty)}$ 便是 $r_{(2t-1)(2t-1)}$ 、 $r_{(2t)(2t)}$ 、 $l_{(2t)(2t)}$ 、 $l_{(2t+1)(2t+1)}$ 的值。



【圖十五】

1
1 2
1 3 5
1 4 9 14

【圖十六】

$a_{11}^{(\infty)}$
$a_{21}^{(\infty)}$ $a_{22}^{(\infty)}$
$a_{31}^{(\infty)}$ $a_{32}^{(\infty)}$ $a_{33}^{(\infty)}$
$a_{41}^{(\infty)}$ $a_{42}^{(\infty)}$ $a_{43}^{(\infty)}$ $a_{44}^{(\infty)}$

【圖十七】

定理 3： $r_{22} = 1$ ；而 $t \geq 1$ 時， $r_{(2t-1)(2t-1)} = r_{(2t)(2t)} = l_{(2t)(2t)} = l_{(2t+1)(2t+1)} = a_{tt}^{(\infty)}$ 。

利用加法原理得到的遞迴關係式：
$$a_{st}^{(\infty)} = \begin{cases} a_{s(t-1)}^{(\infty)} + a_{(s-1)t}^{(\infty)} & , s > t \\ a_{t(t-1)}^{(\infty)} + a_{(t-1)(t-1)}^{(\infty)} & , s = t \end{cases}$$
，且對於任

意的正整數 s ，恆有 $a_{s1}^{(\infty)} = 1$ 。利用此遞迴關係式，我們可以列出下表：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	1																
2	1	2															
3	1	3	5														
4	1	4	9	14													
5	1	5	14	28	42												
6	1	6	20	48	90	132											
7	1	7	27	75	165	297	429										
8	1	8	35	110	275	572	1001	1430									
9	1	9	44	154	429	1001	2002	3432	4862								
10	1	10	54	208	637	1638	3640	7071	11934	16796							
11	1	11	65	273	910	2548	6188	13260	25194	41990	58786						
12	1	12	77	350	1260	3808	9996	23256	48450	90440	149226	208012					
13	1	13	90	440	1700	5506	15504	38760	87210	177650	336876	534888	742900				
14	1	14	104	544	2244	7752	23256	62016	149226	336876	653752	1188640	1931540	2674440			
15	1	15	119	663	2907	10659	33915	95931	245157	572033	1225785	2414425	4345965	7020405	9694845		
16	1	16	135	798	3705	14364	48279	144210	389367	961400	2187185	4601610	8947375	15967980	25662825	35357670	
17	1	17	152	950	4655	19019	67296	211508	600875	1562275	3749460	8351070	17296645	33366625	58929450	94287120	129644790

因為到達終點時的最短路線數為 $a_{tt}^{(\infty)}$ 的值（即下標 $s = t$ 的情況），因此我們

希望能找出只涉及下標 $s = t$ 時的數列 $\langle a_{tt}^{(\infty)} \rangle$ 的遞迴式。

引理 4.1：當 $s \geq t + 2$ 時，
$$a_{st}^{(\infty)} = \sum_{i=1}^t a_{ti}^{(\infty)} a_{(s-1-i)(t+1-i)}^{(\infty)}$$

證明：

以下均討論 $a_{st}^{(\infty)}$ 的情況，故省略 $a_{st}^{(\infty)}$ 為 a_{st} 。

對 n 作數學歸納法證明，而在歸納證明的檢查初始項、作歸納假設，及利用歸納假設驗證下一項的結果時，都分別利用歸納法。證明程序如下：

第一部份證明 $t=1$ 和 $t=2$ 時此定理成立。

第二部份，先證明如果 $t < k$ 時定理成立，則 $(s, t) = (k+2, k)$ 時，此定理成立。而以此條件作歸納假設，再證明 $s = k$ 時此定理也會成立。

首先，第一部份檢驗 $t=1$ 和 $t=2$ 時的情況：

當 $t=1$ 時， $a_{s1} = 1 = a_{11} \times a_{(s-2)1}$ ，原式顯然成立。

當 $t=2$ 時，先對 s 作數學歸納法說明當 $s \geq 4$ 時，有 $a_{s2} = \sum_{i=1}^2 a_{ii} a_{(s-1-i)(3-i)}$ ；

當 $s=4$ 時，由遞迴關係式得知

$$a_{42} = a_{41} + a_{32} = a_{41} + a_{31} + a_{22} = 1 + 1 + a_{22} = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{11} = \sum_{i=1}^2 a_{ii}a_{(3-i)(3-i)}, \text{ 原式成立。}$$

假設 $s = k \geq 4$ 時， $a_{k2} = \sum_{i=1}^2 a_{ii} a_{(k-1-i)(3-i)} = a_{11}a_{(k-2)2} + a_{22}a_{(k-3)1}$ 。

則當 $s = k+1$ 時，

$$\begin{aligned} a_{(k+1)2} &= a_{(k+1)1} + a_{k2} = a_{(k+1)1} + a_{11}a_{(k-2)2} + a_{22}a_{(k-3)1} = a_{11}a_{(k-1)1} + a_{11}a_{(k-2)2} + a_{22}a_{(k-2)1} \\ &= a_{11}a_{(k-1)2} + a_{22}a_{(k-2)1} = \sum_{i=1}^2 a_{ii}a_{(k-i)(3-i)}, \end{aligned}$$

故由數學歸納法得證，當 $s \geq 4$ 時，有 $a_{s2} = \sum_{i=1}^2 a_{ii} a_{(s-1-i)(3-i)}$ 。

接著證明第二部份：

Claim：當 $t < k$ ，且 $s \geq t+2$ 時，若 $a_{st} = \sum_{i=1}^t a_{ii} a_{(s-1-i)(t+1-i)}$ 恆成立，則

$a_{(k+2)k} = \sum_{i=1}^k a_{ii} a_{(k+1-i)(k+1-i)}$ 也會成立：

由遞迴關係式得知：

$$\begin{aligned}
a_{(k+2)k} &= a_{(k+2)(k-1)} + a_{(k+1)k} = a_{(k+2)(k-1)} + a_{(k+1)(k-1)} + a_{kk} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} a_{ii} a_{(k+1-i)(k-i)} + \sum_{i=1}^{k-1} a_{ii} a_{(k-i)(k-i)} + a_{kk} = \sum_{i=1}^{k-1} a_{ii} (a_{(k+1-i)(k-i)} + a_{(k-i)(k-i)}) + a_{kk} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} a_{ii} a_{(k+1-i)(k+1-i)} + a_{kk} a_{11} = \sum_{i=1}^k a_{ii} a_{(k+1-i)(k+1-i)}^\circ
\end{aligned}$$

Claim：當 $t < k$ ， $s \geq t+2$ ，以及當 $(s, t) = (k+2, k)$ 時， $a_{st} = \sum_{i=1}^t a_{ii} a_{(s-1-i)(t+1-i)}$ 若成

立，則當 $t = k$ 時，只要 $s \geq k+2$ ， $a_{sk} = \sum_{i=1}^k a_{ii} a_{(s-1-i)(k+1-i)}$ 亦成立。

對於 s ，以數學歸納法證明，首先，當 $s = k+2$ 時，由上一段的證明得知，此式成立。

設 $s = r \geq k+2$ 時，原式成立，即 $a_{rk} = \sum_{i=1}^k a_{ii} a_{(r-1-i)(k+1-i)}$ ，則當 $s = r+1$ 時，

$$\begin{aligned}
a_{(r+1)k} &= a_{(r+1)(k-1)} + a_{rk} = \sum_{i=1}^{k-1} a_{ii} a_{(r-i)(k-i)} + \sum_{i=1}^k a_{ii} a_{(r-1-i)(k+1-i)} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} a_{ii} (a_{(r-i)(k-i)} + a_{(r-1-i)(k+1-i)}) + a_{kk} a_{(r-1-k)1} \\
&= \sum_{i=1}^k a_{ii} a_{(r-i)(k+1-i)}^\circ
\end{aligned}$$

故由數學歸納法得證，當 $t = k$ 時，只要 $s \geq k+2$ ， $a_{sk} = \sum_{i=1}^k a_{ii} a_{(s-1-i)(k+1-i)}$ 也會成立。

由以上的證明，可知當 $s \geq t+2$ 時， $a_{st} = \sum_{i=1}^t a_{ii} a_{(s-1-i)(t+1-i)}$ 必定成立。 ■

定理 4.2：當 $t > 2$ 時， $a_t^{(\infty)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(\infty)} + \sum_{i=1}^{t-2} a_{ii}^{(\infty)} a_{(t-1-i)(t-1-i)}^{(\infty)}$ 。

證明：

當 $t > 2$ 時，

$$a_t^{(\infty)} = a_{(t-1)(t-1)}^{(\infty)} + a_{t(t-1)}^{(\infty)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(\infty)} + a_{t(t-2)}^{(\infty)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(\infty)} + \sum_{i=1}^{t-2} a_{ii}^{(\infty)} a_{(t-1-i)(t-1-i)}^{(\infty)} \quad \blacksquare$$

利用 $a_t^{(\infty)}$ 的遞迴關係式，我們希望可以得到生成函數 $f(x)$ 。

定理 4.3：當 $t > 2$ 時， $a_t^{(\infty)}$ 的生成函數為 $f(x) = \frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x}$ 。

證明：

以 a_t 表示 $a_t^{(\infty)}$ ，將 $a_t^{(\infty)}$ 的生成函數 $f(x)$ 以冪級數表示，可得

$f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ 。則

$$(f(x))^2 = a_1^2x^2 + (a_1a_2 + a_2a_1)x^3 + (a_1a_3 + a_2^2 + a_3a_1)x^4 + \cdots = \sum_{t=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{t-1} a_i a_{t-i} \right) x^t,$$

$$\text{又 } f(x) - 2xf(x) = a_1x + (a_2 - 2a_1)x^2 + (a_3 - 2a_2)x^3 + \cdots = a_1x + \sum_{t=2}^{\infty} (a_t - 2a_{t-1})x^t。$$

由定理 4.2 知， $\langle a_t^{(n)} \rangle = \langle a_t \rangle$ 的遞迴關係式 $a_t = 2a_{t-1} + \sum_{i=1}^{t-2} a_i a_{t-1-i}$ ，即

$$a_t - 2a_{t-1} = \sum_{i=1}^{t-2} a_i a_{t-1-i}。因此，$$

$$f(x) - 2xf(x) - a_1x - (a_2 - 2a_1)x^2 = x(f(x))^2，$$

即 $x(f(x))^2 - (1-2x)f(x) + x = 0$ ，故

$$f(x) = \frac{1-2x \pm \sqrt{(1-2x)^2 - 4x^2}}{2x} = \frac{1-2x \pm \sqrt{1-4x}}{2x}。$$

由 $f(x)$ 的冪級數知， $f(0) = 0$ ，而若 $f(x) = \frac{1-2x + \sqrt{1-4x}}{2x}$ 時，當 x 趨近於 0

時， $f(x) = \frac{1-2x + \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{\frac{1}{x} - 2 + \sqrt{\frac{1}{x} - 4}}{2}$ 會趨近於無限大，故

$f(x) \neq \frac{1-2x + \sqrt{1-4x}}{2x}$ 。若取 $f(x) = \frac{1-2x - \sqrt{1-4x}}{2x}$ ，由 L'Hopital's rule 知：

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 + \frac{2}{\sqrt{1-4x}}}{2} = 0 = f(0)，故 f(x) = \frac{1-2x - \sqrt{1-4x}}{2x}。 \quad \blacksquare$$

2. 一般式

我們於參考資料[2]中發現 $a_t^{(\infty)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(\infty)} + \sum_{i=1}^{t-2} a_{ii}^{(\infty)} a_{(t-1-i)(t-1-i)}^{(\infty)}$ 即為卡特蘭數

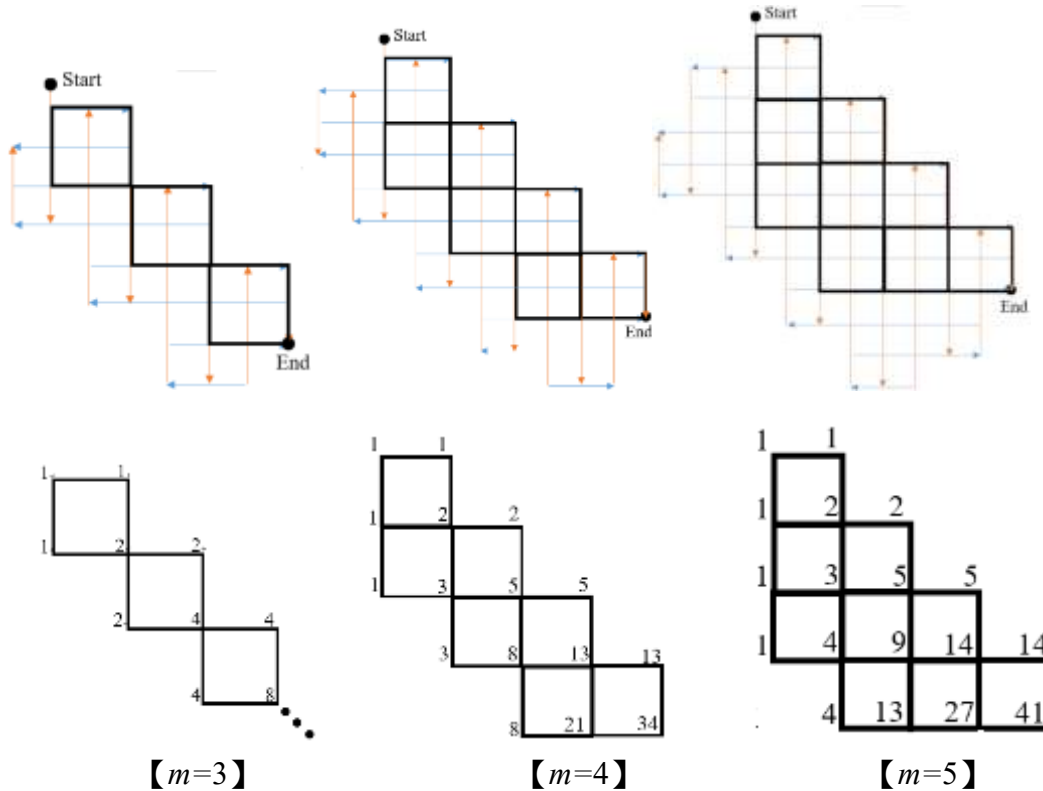
的遞迴關係式。其一般式可表示為 $a_t^{(\infty)} = \frac{1}{t+1} \binom{2t}{t} = \frac{(2t)!}{(t+1)!t!}$ 。

定理 4.4：(卡特蘭數的一般式)

$$a_t^{(\infty)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(\infty)} + \sum_{i=1}^{t-2} a_{ii}^{(\infty)} a_{(t-1-i)(t-1-i)}^{(\infty)} = \frac{1}{t+1} \binom{2t}{t} = \frac{(2t)!}{(t+1)!t!}；$$

$$\text{即 } r_{(2t-1)(2t-1)} = r_{(2t)(2t)} = \frac{2t!}{(t+1)!t!}。$$

(七) l_{mn} 、 r_{mn} 的遞迴關係



在已知關係 $r_{mn} = l_{(n+1)m}$ 下，我們只要求出 r_{mn} ，即可以推算出所有情況的最短路

線數，其中已知 $r_{2n} = 1$ 。

經已知圖形求 r_{mn} 時，我們省略向左和向上的箭頭，可以發現圖形相關性。討論 r_{2n} 時，只有轉折的線，因此 $r_{2n} = 1$ 。而 r_{3n} 則是由四個格子組成的方框一一堆疊； r_{4n} 由四個小格子組成的方框兩兩堆疊； r_{5n} 由四個格子組成的方框三個為一組堆疊。形成如圖規律，可知當 r_{in} 時，方形將以 $(i-2)$ 個為一組堆疊。

接著，我們同樣嘗試將 r_{mn} 分解為 $r_{m(n-1)}$ 、 $r_{m(n-2)} \dots$ 、 r_{m1} 等數，尋找其係數規律。

已知 $r_{mn} = l_{(n+1)m}$ ，得 $a_{tt}^{(m)} = r_{m(2n)} = r_{m(2n-1)} = l_{(2n+1)m} = l_{(2n)m}$ 。

1. $m=3$ 時

可列出陣列 $\langle a_{st}^{(3)} \rangle$ ：

$$\begin{array}{cccc}
 1 & & & a_{11}^{(3)} \\
 1 & 2 & & a_{21}^{(3)} & a_{22}^{(3)} \\
 & 2 & 4 & & a_{32}^{(3)} & a_{33}^{(3)} \\
 & & 4 & 8 & & a_{43}^{(3)} & a_{44}^{(3)}
 \end{array}$$

$$a_{11}^{(3)} = a_{21}^{(3)} = 1 \text{ } \circ$$

定理 5 : $a_{tt}^{(3)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(3)} = 2^{t-1}$; 因此 $r_{3(2t)} = r_{3(2t-1)} = 2r_{3(2t-2)} = 2r_{3(2t-3)} = 2^{t-1}$ 。

$a_{tt}^{(3)} = a_{(t-1)(t-1)}^{(3)} + a_{t(t-1)}^{(3)} = a_{(t-1)(t-1)}^{(3)} + a_{(t-1)(t-1)}^{(3)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(3)}$ 。因此數列 $\langle a_{tt}^{(3)} \rangle$ 是首項為 1，

公比為 2 的等比數列，故一般項 $a_n^{(3)} = 2^{t-1}$ 。

可列出陣列 $\langle \mathbf{a}_{st}^{(4)} \rangle$:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & a_{11}^{(4)} \\
1 & 2 & & & & & a_{21}^{(4)} & a_{22}^{(4)} \\
1 & 3 & 5 & & & & a_{31}^{(4)} & a_{32}^{(4)} & a_{33}^{(4)} \\
& 3 & 8 & 13 & & & & a_{42}^{(4)} & a_{43}^{(4)} & a_{44}^{(4)} \\
& & 8 & 21 & 34 & & & & a_{53}^{(4)} & a_{54}^{(4)} & a_{55}^{(4)}
\end{array}$$

利用加法原理得到的遞迴關係式：

$$a_{st}^{(4)} = \begin{cases} a_{(t+1)t}^{(4)} & , s = t + 2 \\ a_{t(t-1)}^{(4)} + a_{tt}^{(4)} & , s = t + 1 \\ a_{t(t-1)}^{(4)} + a_{(t-1)(t-1)}^{(4)} & , s = t \end{cases} \quad , \text{ 且}$$

$$a_{11}^{(4)} = a_{21}^{(4)} = a_{31}^{(4)} = 1 \quad \circ$$

定理 6.1 : $a_{(t+1)t}^{(4)} = \sum_{i=1}^t a_{ii}^{(4)}$ 。

對 t 作數學歸納法：已知當 $t=1$ 時， $a_{21}^{(4)}=1=\sum_{i=1}^1 a_{ii}^{(4)}=a_{11}^{(4)}$ 。假設 $t=k$ 時，

$a_{(k+1)k}^{(4)} = \sum_{i=1}^k a_{ii}^{(4)}$ 成立，則 $t = k + 1$ 時，

$$a_{(k+2)(k+1)}^{(4)} = a_{(k+1)(k+1)}^{(4)} + a_{(k+1)(k)}^{(4)} = a_{(k+1)(k+1)}^{(4)} + \sum_{i=1}^k a_{ii}^{(4)} = \sum_{i=1}^{k+1} a_{ii}^{(4)} \quad ,$$

故由數學歸納法得證。■

定理 6.2 :

$$a_{nn}^{(4)} = 2a_{(n-1)(n-1)}^{(4)} + \sum_{i=1}^{n-2} a_{ii}^{(4)} ;$$

$$\text{因此 } r_{4(2t)} = r_{4(2t-1)} = 2r_{4(2t-2)} + \sum_{i=1}^{t-2} r_{4(2i)} = 2r_{4(2t-3)} + \sum_{i=1}^{t-2} r_{4(2i-1)} \circ$$

證明：

$$a_{tt}^{(4)} = a_{(t-1)(t-1)}^{(4)} + a_{(t)(t-1)}^{(4)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(4)} + a_{(t)(t-2)}^{(4)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(4)} + \sum_{i=1}^{t-2} a_{ii}^{(4)} \circ$$

3. $m = 5$ 時

可列出陣列 $\langle a_{st}^{(5)} \rangle$:

1					$a_{11}^{(5)}$				
1	2				$a_{21}^{(5)}$	$a_{22}^{(5)}$			
1	3	5			$a_{31}^{(5)}$	$a_{23}^{(5)}$	$a_{33}^{(5)}$		
1	4	9	14		$a_{41}^{(5)}$	$a_{24}^{(5)}$	$a_{34}^{(5)}$	$a_{44}^{(5)}$	
	4	13	27	41		$a_{25}^{(5)}$	$a_{35}^{(5)}$	$a_{45}^{(5)}$	$a_{55}^{(5)}$

$$\text{利用加法原理得到的遞迴關係式：} a_{st}^{(5)} = \begin{cases} a_{(t+2)t}^{(5)} & , s = t + 3 \\ a_{s(t-1)}^{(5)} + a_{(s-1)t}^{(5)} & , 0 < s - t < 3 \text{ , 且} \\ a_{t(t-1)}^{(5)} + a_{(t-1)(t-1)}^{(5)} & , s = t \end{cases}$$

$$a_{11}^{(5)} = a_{21}^{(5)} = a_{31}^{(5)} = a_{41}^{(5)} = 1 \circ$$

$$\text{定理 7.1 : } a_{(t+2)t}^{(5)} = \sum_{i=1}^t 2^{i-1} a_{(t+1-i)(t+1-i)}^{(5)} \circ$$

證明：

對 t 作數學歸納法：

當 $t=1$ 時， $a_{31}^{(5)} = 1 = 2^{1-1} \cdot a_{11}^{(5)}$ 原式成立。假設 $t=k$ 時， $a_{(k+2)k}^{(5)} = \sum_{i=1}^k 2^{i-1} a_{(k+1-i)(k+1-i)}^{(5)}$ 成

立，則 $t=k+1$ 時，

$$\begin{aligned} a_{(k+3)(k+1)}^{(5)} &= a_{(k+2)k}^{(5)} + a_{(k+2)(k+1)}^{(5)} = a_{(k+2)k}^{(5)} + a_{(k+2)k}^{(5)} + a_{(k+1)(k+1)}^{(5)} \\ &= 2 \times \sum_{i=1}^k 2^{i-1} a_{(k+1-i)(k+1-i)}^{(5)} + 2^0 a_{(k+1)(k+1)}^{(5)} = \sum_{i=1}^{k+1} 2^{i-1} a_{(k+2-i)(k+2-i)}^{(5)} \text{ ,} \end{aligned}$$

故由數學歸納法得證。

定理 7.2 :

$$a_{tt}^{(5)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(5)} + \sum_{i=1}^{t-2} 2^{i-1} a_{(t+1-i)(t+1-i)}^{(5)} ;$$

$$\text{因此 } r_{5(2t)} = r_{5(2t-1)} = 2r_{5(2t-2)} + \sum_{i=1}^{t-2} 2^{i-1} r_{5(2t+2-2i)} = 2r_{5(2t-3)} + \sum_{i=1}^{t-2} 2^{i-1} r_{5(2t+2-2i)} .$$

證明 :

$$a_{tt}^{(5)} = a_{(t-1)(t-1)}^{(5)} + a_{t(t-1)}^{(5)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(5)} + a_{t(t-2)}^{(5)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(5)} + \sum_{i=1}^{t-2} 2^{i-1} a_{(t+1-i)(t+1-i)}^{(5)} . \quad \blacksquare$$

$$\text{由定理 5 知, 上式亦可寫成: } a_{tt}^{(5)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(5)} + \sum_{i=1}^{t-2} a_{ii}^{(3)} a_{(t+1-i)(t+1-i)}^{(5)} .$$

4. $a_{nn}^{(m)}$ 和 $a_{nn}^{(m+2)}$ 的關係

利用加法原理可得到遞迴關係式

$$a_{st}^{(m)} = \begin{cases} a_{(s-1)t}^{(m)} & , as \ s-t = m-2 \\ a_{s(t-1)}^{(m)} + a_{(s-1)t}^{(m)} & , as \ 0 < s-t < m-2 \\ a_{t(t-1)}^{(m)} + a_{(t-1)(t-1)}^{(m)} & , as \ s-t = 0 \end{cases} ,$$

$$\text{且 } a_{11}^{(m)} = a_{21}^{(m)} = a_{31}^{(m)} = \dots = a_{(m-1)1}^{(m)} = 1 .$$

引理 8.1 :

若 j_0 為 $\langle a_{ij}^{(m)} \rangle$ 的第一項 (即陣列 $\langle a_{ij}^{(m)} \rangle$ 第 i 列的第一個出現數字的項), 則

$$\sum_{j=j_0}^k a_{ij}^{(m)} = a_{(i+1)k}^{(m)} .$$

證明 :

對 k 作數學歸納法 :

當 $k = j_0$ 時, 由 $a_{ij}^{(m)}$ 的遞迴關係知, $a_{(i+1)j_0}^{(m)} = a_{ij_0}^{(m)} .$

假設 $k = r \geq j_0$ 時 $\sum_{j=j_0}^r a_{ij}^{(m)} = a_{(i+1)r}^{(m)}$, 則當 $k = r+1$ 時, 由 $a_{ij}^{(m)}$ 的遞迴關係及假設得知,

$$a_{(i+1)(r+1)}^{(m)} = a_{(i+1)r}^{(m)} + a_{i(r+1)}^{(m)} = \sum_{j=j_0}^r a_{ij}^{(m)} + a_{i(r+1)}^{(m)} = \sum_{j=j_0}^{r+1} a_{ij}^{(m)} . \text{ 故由歸納法得證:}$$

$$\sum_{j=j_0}^k a_{ij}^{(m)} = a_{(i+1)k}^{(m)} . \quad \blacksquare$$

定理 8.2 : $a_{(t+2)t}^{(m)} = \sum_{k=1}^t a_{(t+1-k)(t+1-k)}^{(m-2)} a_{kk}^{(m)}$, $m \geq 5$ 。

證明：

我們的目的是利用 $\langle a_{ij}^{(m)} \rangle$ 的遞迴關係，將 $a_{(t+2)t}^{(m)}$ 分解成 $a_{11}^{(m)}$ 、 $a_{22}^{(m)}$ 、 $a_{33}^{(m)}$ 、 $\dots$ 、 $a_{tt}^{(m)}$ 的線性組合。

首先，先分解成 $a_{(t+2)t}^{(m)} = a_{(t+2)(t-1)}^{(m)} + a_{(t+1)t}^{(m)} = a_{(t+2)(t-1)}^{(m)} + a_{(t+1)(t-1)}^{(m)} + a_{tt}^{(m)}$ ，在 $\langle a_{st}^{(m)} \rangle$ 的排列位置裡，我們把它表示成：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & a_{tt}^{(m)} & & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 a_{(t+1)(t-1)}^{(m)} & \leftarrow & a_{(t+1)t}^{(m)} & \xrightarrow{\text{係數}} & 1 \leftarrow 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 a_{(t+2)(t-1)}^{(m)} & \leftarrow & a_{(t+2)t}^{(m)} & & 1 \leftarrow 1
 \end{array}$$

此時，因為 $a_{tt}^{(m)}$ 這一項是我們想要將 $a_{(t+2)t}^{(m)}$ 分解的結果的其中一項，故保留不動，

其餘的兩項 $a_{(t+2)(t-1)}^{(m)}$ 和 $a_{(t+1)(t-1)}^{(m)}$ 則可繼續利用遞迴關係式作分解：

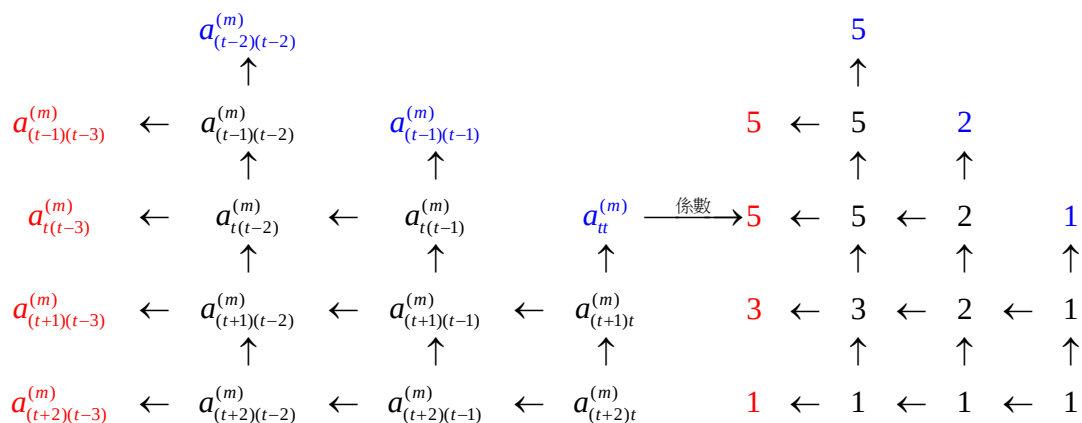
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & a_{(t-1)(t-1)}^{(m)} & & 2 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 a_{t(t-2)}^{(m)} & \leftarrow & a_{t(t-1)}^{(m)} & & a_{tt}^{(m)} & \xrightarrow{\text{係數}} & 2 \leftarrow 2 \leftarrow 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 a_{(t+1)(t-2)}^{(m)} & \leftarrow & a_{(t+1)(t-1)}^{(m)} & \leftarrow & a_{(t+1)t}^{(m)} & & 2 \leftarrow 2 \leftarrow 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 a_{(t+2)(t-2)}^{(m)} & \leftarrow & a_{(t+2)(t-1)}^{(m)} & \leftarrow & a_{(t+2)t}^{(m)} & & 1 \leftarrow 1 \leftarrow 1
 \end{array}$$

上圖表示的意思是最右下角的 $a_{(t+2)t}^{(m)}$ 可分解成：

$$a_{(t+2)t}^{(m)} = 1 \cdot a_{tt}^{(m)} + 2 \cdot a_{(t-1)(t-1)}^{(m)} + 2 \cdot a_{t(t-2)}^{(m)} + 2 \cdot a_{(t+1)(t-2)}^{(m)} + 1 \cdot a_{(t+2)(t-2)}^{(m)} \quad \circ$$

同樣的，上式的前兩項 $1 \cdot a_{tt}^{(m)}$ 和 $2 \cdot a_{(t-1)(t-1)}^{(m)}$ 是我們要保留不動的，而上式的後三

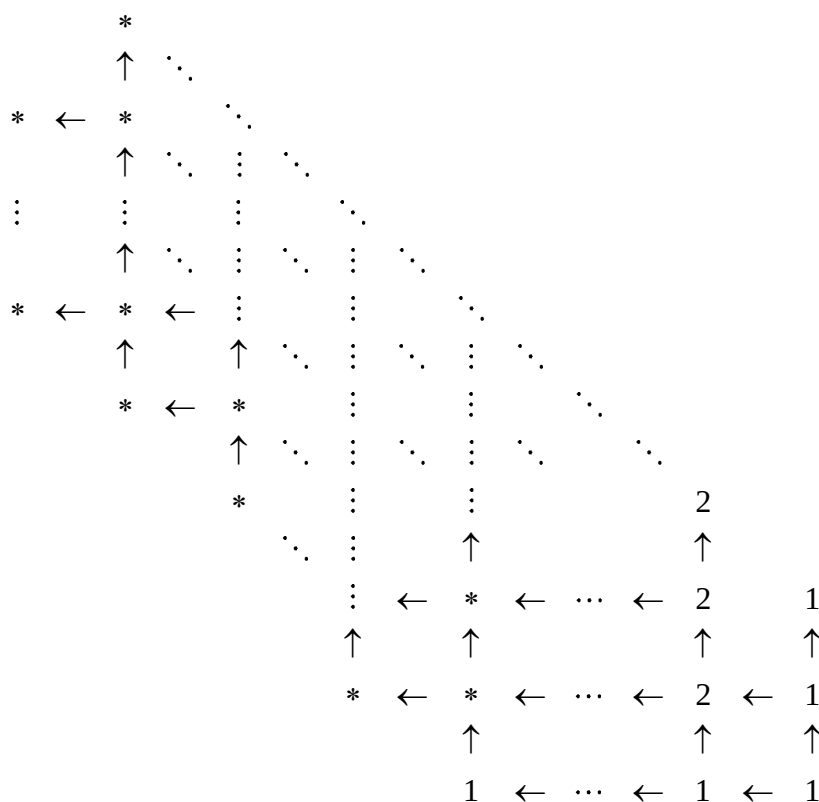
項 $2 \cdot a_{t(t-2)}^{(m)}$ 、 $2 \cdot a_{(t+1)(t-2)}^{(m)}$ 和 $1 \cdot a_{(t+2)(t-2)}^{(m)}$ 可再繼續分解：



上圖表示 $a_{(t+2)t}^{(m)}$ 可分解成

$$a_{(t+2)t}^{(m)} = 1 \cdot a_{tt}^{(m)} + 2 \cdot a_{(t-1)(t-1)}^{(m)} + 5 \cdot a_{(t-2)(t-2)}^{(m)} + 5 \cdot a_{(t-1)(t-3)}^{(m)} + 5 \cdot a_{t(t-3)}^{(m)} + 3 \cdot a_{(t+1)(t-3)}^{(m)} + 1 \cdot a_{(t+2)(t-3)}^{(m)}$$

同理，我們若依照這種方式分解，利用加法原理，可得到如下的「係數圖」：



因為在 $\langle a_{ij}^{(m)} \rangle$ 的排列裡，每一行最多只有 $m-1$ 項，所以上圖的左下角會出現空

白的三角形區域。而且在分解的過程中，一旦得到 $a_{ii}^{(m)}$ 的係數後即保留不動，不

再將之分解，因此有 $a_{ii}^{(m)}$ 係數 = $a_{i(i-1)}^{(m)}$ 係數 = $a_{i(i-2)}^{(m)}$ 係數。而且「係數圖」由右下

開始往左往上利用加法原理寫出「係數」的時候，欲保留最左邊一行為 $a_{(t+2)t}^{(m)}$ 分

解後的項時（即為「係數圖」中紅色的部份），該行每一項的係數都等於右邊一項的係數。

令「係數圖」中， $a_{ij}^{(m)}$ 的位置對應的係數為 $b_{(t+1-j)(t+3-i)}^{(m)}$ ，即：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & a_{(t-2)(t-2)}^{(m)} & & & & b_{35}^{(m)} \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow \\
 \cdots & \leftarrow & a_{(t-1)(t-2)}^{(m)} & & a_{(t-1)(t-1)}^{(m)} & & \cdots \leftarrow b_{34}^{(m)} & & b_{24}^{(m)} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \cdots & \leftarrow & a_{t(t-2)}^{(m)} & \leftarrow & a_{t(t-1)}^{(m)} & \xrightarrow{\text{係數}} & \cdots \leftarrow b_{33}^{(m)} & \leftarrow & b_{23}^{(m)} & & b_{13}^{(m)} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \cdots & \leftarrow & a_{(t+1)(t-2)}^{(m)} & \leftarrow & a_{(t+1)(t-1)}^{(m)} & \leftarrow & a_{(t+1)t}^{(m)} & & \cdots \leftarrow b_{32}^{(m)} & \leftarrow & b_{22}^{(m)} & \leftarrow & b_{12}^{(m)} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \cdots & \leftarrow & a_{(t+2)(t-2)}^{(m)} & \leftarrow & a_{(t+2)(t-1)}^{(m)} & \leftarrow & a_{(t+2)t}^{(m)} & & \cdots \leftarrow b_{31}^{(m)} & \leftarrow & b_{21}^{(m)} & \leftarrow & b_{11}^{(m)}
 \end{array}$$

若最左邊的一行為第 i_0 行，其中 $i_0 \geq 1$ ，則當 $j \leq i_0$ 時， $b_{i_0 j}^{(m)} = b_{(i_0+1)j}^{(m)}$ ，且 $i > i_0$ 時，

$$b_{ij}^{(m)} = \begin{cases} b_{jj}^{(m)} & , i - j = -1 \text{ or } -2 \\ b_{(i-1)j}^{(m)} & , i - j = m - 4 \\ b_{i(j-1)}^{(m)} + b_{(i-1)j}^{(m)} & , 0 < i - j < m - 4 \\ b_{j(j-1)}^{(m)} + b_{(j-1)(j-1)}^{(m)} & , i - j = 0 \end{cases}$$

我們可以發現當 $i > i_0$ 且 $i - j \geq 0$ 時， $b_{ij}^{(m)}$ 的遞迴關係與 $a_{ij}^{(m-2)}$ 的遞迴關係相同，

即 $b_{ij}^{(m)} = a_{ij}^{(m-2)}$ ，當 $i - j = -1$ 或 -2 時， $b_{ij}^{(m)} = a_{ii}^{(m)}$ 。

因此若將這個「係數圖」利用加法原理從第 $(t+2, t)$ 元的 $b_{11}^{(m)}$ 推到第一行（即

$i_0 = 1$ ）的 $b_{tt}^{(m)}$ 、 $b_{t(t-1)}^{(m)}$ 、 $b_{t(t-2)}^{(m)}$ 、 $\cdots$ 、 $b_{t(t+3-\min\{t+2, m-1\})}^{(m)}$ ，則 $a_{(t+2)t}^{(m)}$ 可以分解成：

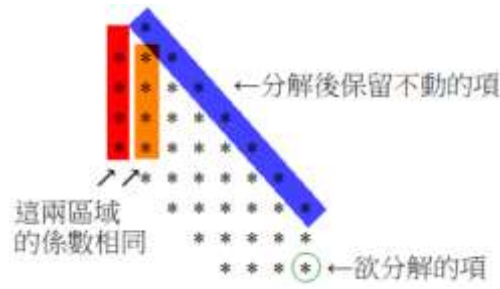
$$a_{(t+2)t}^{(m)} = \sum_{k=2}^t b_{(t+1-k)(t+3-k)}^{(m)} a_{kk}^{(m)} + \sum_{k=3}^{\min\{t+2, m-1\}} b_{t(t+3-k)}^{(m)} a_{k1}^{(m)} \text{。}$$

又第一行為係數圖的最左邊的一行，因此 $b_{tt}^{(m)}$ 、 $b_{t(t-1)}^{(m)}$ 、 $\cdots$ 、 $b_{t(t+3-\min\{t+2, m-1\})}^{(m)}$ 分別

會等於 $b_{(t-1)t}^{(m)}$ 、 $b_{(t-1)(t-1)}^{(m)}$ 、 $\cdots$ 、 $b_{(t-1)(t+3-\min\{t+2, m-1\})}^{(m)}$ ，分別於 $a_{(t-1)(t-1)}^{(m-2)}$ 、 $a_{(t-1)(t-1)}^{(m-2)}$ 、 $\cdots$ 、

$a_{(t-1)(t+3-\min\{t+2, m-1\})}^{(m-2)}$ ，因此 $a_{(t+2)t}^{(m)}$ 可以寫成：

$$a_{(t+2)t}^{(m)} = \sum_{k=2}^t a_{(t+1-k)(t+1-k)}^{(m-2)} a_{kk}^{(m)} + a_{(t-1)(t-1)}^{(m-2)} a_{21}^{(m)} + \sum_{k=4}^{\min\{t+2, m-1\}} a_{(t-1)(t+3-k)}^{(m-2)} a_{k1}^{(m)} \circ$$



因為對於所有的 k ， $a_{k1}^{(m)} = 1$ ，且在上式最後一個 Σ 的部份，由引理 11.1 知，

$$\sum_{k=4}^{\min\{t+2, m-1\}} a_{(t-1)(t+3-k)}^{(m-2)} = a_{t(t-1)}^{(m-2)} \text{，又 } a_{(t-1)(t-1)}^{(m-2)} + a_{t(t-1)}^{(m-2)} = a_{tt}^{(m-2)} \text{，因此}$$

$$a_{(t+2)t}^{(m)} = \sum_{k=2}^t a_{(t+1-k)(t+1-k)}^{(m-2)} a_{kk}^{(m)} + a_{tt}^{(m-2)} = \sum_{k=1}^t a_{(t+1-k)(t+1-k)}^{(m-2)} a_{kk}^{(m)}$$

故得證。 ■

$$\text{定理 8.3 : } a_{tt}^{(m+2)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(m+2)} + \sum_{k=1}^{t-2} a_{(t+1-k)(t+1-k)}^{(m)} a_{kk}^{(m+2)} \text{， } m \geq 3 \text{；}$$

$$\text{因此 } r_{m(2t)} = r_{m(2t-1)} = 2r_{m(2t-2)} + \sum_{i=1}^{t-2} r_{(m-2)(2t+2i)} r_{m(2i)} = 2r_{m(2t-3)} + \sum_{i=1}^{t-2} r_{(m-2)(2t+2i-1)} r_{m(2i-1)} \circ$$

證明：

$$\begin{aligned} a_{tt}^{(m+2)} &= a_{t(t-1)}^{(m+2)} + a_{(t-1)(t-1)}^{(m+2)} = a_{t(t-2)}^{(m+2)} + a_{(t-1)(t-1)}^{(m+2)} + a_{(t-1)(t-1)}^{(m+2)} = 2 \times a_{(t-1)(t-1)}^{(m+2)} + a_{t(t-2)}^{(m+2)} \\ &= 2 \times a_{(t-1)(t-1)}^{(m+2)} + \sum_{k=1}^{t-2} a_{(t+1-k)(t+1-k)}^{(m)} a_{kk}^{(m+2)} \end{aligned}$$

(八) 透過生成函數由遞迴關係式推導一般式

1. $m = 2$ 時： $\langle a_t \rangle = \langle 1 \rangle$ 。

2. $m = 3$ 時： $\langle a_t \rangle$ 的一般式為 $a_t = 2^{t-1}$ 。

3. $m = 4$ 時：數列 $\langle a_t \rangle : 1, 2, 5, 13, 34, 89, \dots$ ，且已知 $a_t = 2a_{t-1} + \sum_{i=1}^{t-2} a_i$ 。

$$\text{定理 9 : } a_{tt}^{(4)} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^t + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^t \text{；}$$

$$\text{因此 } r_{4(2t)} = r_{4(2t-1)} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^t + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^t \circ$$

證明：

假設生成函數 $f_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \dots$ ，且 $a_0 = 0$ ，則

$$f_4(x) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)x^3 \dots, \text{ 即}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} f_4(x) &= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)x^3 \dots \\ &= 0 + (a_2 - a_1)x + (a_3 - a_2)x^2 + (a_4 - a_3)x^3 \dots \\ &= (a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \dots) - (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) = \frac{f_4(x) - x}{x} - f_4(x) \\ \Rightarrow f_4(x) &= \frac{-x^2 + x}{x^2 - 3x + 1} = -1 + \frac{-2x + 1}{x^2 - 3x + 1} = -1 + \frac{A}{1 - \alpha x} + \frac{B}{1 - \beta x}, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, A = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, B = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}. \text{ 則}$$

$$\begin{aligned} f_4(x) &= -1 + A(1 + (\alpha x) + (\alpha x)^2 + (\alpha x)^3 + \dots) + B(1 + (\beta x) + (\beta x)^2 + (\beta x)^3 + \dots) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (A \cdot \alpha^k + B \cdot \beta^k) x^k. \end{aligned}$$

$$\text{因此 } a_t^{(4)} = A \cdot \alpha^t + B \cdot \beta^t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^t + \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^t. \quad \blacksquare$$

4. $m = 5$ 時：

$$\text{已知數列 } \langle a_t \rangle = 1, 2, 5, 14, 41, 122, \dots, \text{ 且已知 } a_t = 2a_{(t-1)} + \sum_{i=1}^{t-2} 2^{i-1} a_{(t+1-i)}.$$

定理 10 : $a_t^{(5)} = \frac{1}{2} + \frac{3^t}{6} = \frac{3^{t-1} + 1}{2}$; 因此 $r_{5(2t)} = r_{5(2t-1)} = \frac{3^{t-1} + 1}{2}$ 。

證明：

假設 $f_5(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \dots$ 且 $a_0 = 0$

$$\begin{aligned} f_5(x) &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \dots \\ &= a_1x + 2a_1x^2 + (2a_2 + 2^0a_1)x^3 + (2a_3 + 2^0a_2 + 2^1a_1)x^4 \dots \\ &= x + 2x \cdot f_5(x) + \frac{x^2}{1 - 2x} f_5(x) \end{aligned}$$

$$\therefore f_5(x) = \frac{-2x^2 + x}{3x^2 - 4x + 1} = -\frac{2}{3} + \frac{\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}}{3x^2 - 4x + 1} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{6(1 - 3x)} + \frac{1}{2(1 - x)}$$

$$\Rightarrow f_5(x) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{6}(1 + (3x) + (3x)^2 + (3x)^3 + \dots) + \frac{1}{2}(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3^k}{6} + \frac{1}{2}\right) x^k$$

$$\text{因此 } a_t^{(5)} = \frac{1}{2} + \frac{3^t}{6} = \frac{3^{t-1} + 1}{2}. \quad \blacksquare$$

5. $m \geq 5$ 時

$$\text{已知 } a_{tt}^{(m)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(m)} + \sum_{k=1}^{t-2} a_{(t-k)(t-k)}^{(m-2)} a_{kk}^m \Leftrightarrow a_{tt}^{(m)} - 2a_{(t-1)(t-1)}^{(m)} = \sum_{k=1}^{t-2} a_{(t-k)(t-k)}^{(m-2)} a_{kk}^m \dots (*) \circ$$

假設 $f_{m+2}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \dots$ 、 $f_m(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \dots$ ， 且

$$a_0 = b_0 = 0 \text{ , 則 } f_{m+2}(x) \cdot f_m(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots$$

$$\text{且 } \frac{f_{m+2}(x)}{x} - 1 - 2f_{m+2}(x) = (a_2 - 2a_1x) + (a_3 - 2a_2)x^2 + (a_4 - 2a_3)x^3 + \dots$$

由(*)式知 $\frac{f_{m+2}(x)}{x} - 1 - 2f_{m+2}(x) = f_{m+2}(x) \cdot f_m(x)$ ， 得冪級數：

$$f_{m+2}(x) = \left(\frac{x}{1 - 2x - xf_m(x)} \right) \circ$$

定理 11： $m \geq 5$ 時，可得 $\langle a_t^{(m)} \rangle$ 的生成函數滿足 $f_{m+2}(x) = \left(\frac{x}{1 - 2x - xf_m(x)} \right) \circ$

6. $m = 6$ 時；

定理 12： $a_t^{(6)} \approx 0.10757 \times 3.24696^t + 0.34930 \times 1.55497^t + 0.54313 \times 0.19806^t \circ$

證明：

由定理 11 知 $f_{m+2}(x) = \left(\frac{x}{1 - 2x - xf_m(x)} \right)$ ， 利用 $f_4(x)$ 求出 $f_6(x)$ ：

$$f_6(x) = \frac{x}{1 - 2x - xf_4(x)} = \frac{x}{1 - 2x - x \frac{-x^3 + x^2}{x^2 - 3x + 1}} = -1 + \frac{3x^2 - 4x + 1}{-x^3 + 6x^2 - 5x + 1} \circ$$

透過分式的分母的三次函數圖形知道它可以分解成三個實係數一次因式

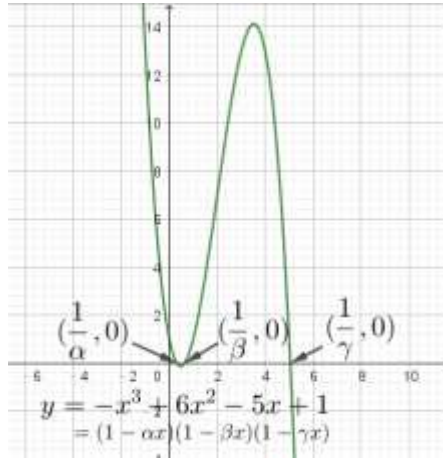
$$-x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)(1 - \gamma x) \text{ , 因此}$$

$$f_6(x) = -1 + \frac{A}{1 - \alpha x} + \frac{B}{1 - \beta x} + \frac{C}{1 - \gamma x} \text{ ; } a_t^{(6)} \text{ 可以寫成 } a_t^{(6)} = A\alpha^t + B\beta^t + C\gamma^t \circ$$

儘管如此，我們無法得到 A 、 B 、 C 和 α 、 β 、 γ 確切的值，僅能透過分母

$$y = -x^3 + 6x^2 - 5x + 1 \text{ 的函數圖形知， } \alpha \approx 3.24696 \text{ 、 } \beta \approx 1.55497 \text{ 、}$$

$$\gamma \approx 0.19806 \circ$$



由 $A(1-\beta x)(1-\gamma x) + B(1-\alpha x)(1-\gamma x) + C(1-\alpha x)(1-\beta x) = 3x^2 - 4x + 1$ ，分別代入

$\frac{1}{\alpha}$ 、 $\frac{1}{\beta}$ 、 $\frac{1}{\gamma}$ ，得到 $A \approx 0.10757$ 、 $B \approx 0.34930$ 、 $C = 0.54313$ 。意即

$$a_u^{(6)} \approx 0.10757 \times 3.24696^t + 0.34930 \times 1.55497^t + 0.54313 \times 0.19806^t。$$

7. $m=7$ 時

$$\text{定理 13 : } a_u^{(7)} = \frac{1}{4}(2^t + (2+\sqrt{2})^{t-1} + (2-\sqrt{2})^{t-1})。$$

證明：

由定理 11 知 $f_{m+2}(x) = \left(\frac{x}{1-2x-xf_m(x)} \right)$ ，利用 $f_5(x)$ 求出 $f_7(x)$ ：

$$\begin{aligned} f_7(x) &= \frac{x}{1-2x-xf_5(x)} = \frac{x}{1-2x-x \frac{-2x^2+x}{3x^2-4x+1}} = -\frac{3}{4} + \frac{\frac{7}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{4}}{-4x^3 + 10x^2 - 6x + 1} \\ &= -\frac{3}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{1-2x} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8}}{1-(2+\sqrt{2})x} + \frac{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}}{1-(2-\sqrt{2})x} \\ \Rightarrow f_7(x) &= \frac{-3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8} \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} ((2+\sqrt{2})x)^k + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} ((2-\sqrt{2})x)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} (2^k + (2+\sqrt{2})^{k-1} + (2-\sqrt{2})^{k-1}) x^k， \end{aligned}$$

$$\text{因此 } a_u^{(7)} = \frac{1}{4}(2^t + (2+\sqrt{2})^{t-1} + (2-\sqrt{2})^{t-1})。$$

■

8. $m \rightarrow \infty$ 時

當 $m \rightarrow \infty$ 時，即表示陣列 $\langle a_t^{(m)} \rangle$ 為 $\langle a_t^{(\infty)} \rangle$ 的情況，由定理 7.2 知， $\langle a_t^{(\infty)} \rangle$ 的生成

函數為 $f(x) = \frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x}$ 。

而另一方面，當 $m \rightarrow \infty$ 時， $f_m(x) \rightarrow f(x)$ ，我們也可透過定理 14 知， $f(x)$ 滿

足 $f(x) = (\frac{x}{1-2x-xf(x)})$ ，移項後得 $x(f(x))^2 - 2xf(x) + f(x) - x = 0$ 。此式也與

定理 4.3 的證明中的生成函數的關係式相同。

參、研究結果與討論

一、研究結果

(一)終點位置

在 $m \times n$ 階旋轉方塊中，以 R_{11} 為起點，終點只能是 R_{1n} 或 L_{m1} 。

(二)不同終點最短路徑數的關係

在 $m \times n$ 階旋轉方塊，抵達右側終點 R_{1n} 的方法數，與 $(n+1) \times m$ 階土地時，抵達左側終點 L_{m1} 的方法數相同，即 $r_{mn} = l_{(n+1)m}$ 。

(三)最短路徑數的遞迴關係、生成函數與一般式

1. 已知在行列土地個數相同時中，抵達右側與左側終點的關係為：

$$a_t^{(\infty)} = r_{(2t-1)(2t-1)} = r_{(2t)(2t)} = l_{(2t)(2t)} = l_{(2t+1)(2t+1)} \text{，其中}$$

$$a_t^{(\infty)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(\infty)} + \sum_{i=1}^{n-2} a_{ii}^{(\infty)} a_{(t-1-i)(t-1-i)}^{(\infty)} \text{。一般式為 } a_t^{(\infty)} = \frac{(2t)!}{(t+1)!t!} \text{，即}$$

$$r_{(2t-1)(2t-1)} = r_{(2t)(2t)} = l_{(2t)(2t)} = l_{(2t+1)(2t+1)} = \frac{(2t)!}{(t+1)!t!} \text{。}$$

2. 已知在 $m \times n$ 階旋轉方塊時，抵達右側與左側終點的最短路線數關係為：

$$a_t^{(m)} = r_{(m)(2t)} = r_{(m)(2t-1)} = l_{(2t+1)(m)} = l_{(2t)(m)} \text{。}$$

$$(1) \quad a_{tt}^{(2)} = 1, \text{ 即 } r_{2(2t)} = r_{2(2t-1)} = 1。$$

$$(2) \quad a_{tt}^{(3)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(3)} = 2^{t-1}, \text{ 即 } r_{3(2t)} = r_{3(2t-1)} = 2^{t-1}。$$

$$(3) \quad a_{tt}^{(4)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(4)} + \sum_{i=1}^{t-2} a_{ii}^{(4)} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^t + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^t, \text{ 即}$$

$$r_{4(2t)} = r_{4(2t-1)} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^t + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^t。$$

$$(4) \quad a_{tt}^{(5)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(5)} + \sum_{i=1}^{t-2} 2^{i-1} a_{(t+1-i)(t+1-i)}^{(5)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(5)} + \sum_{i=1}^{t-2} a_{ii}^{(3)} a_{(t+1-i)(t+1-i)}^{(5)} = \frac{3^{t-1}+1}{2},$$

$$\text{即 } r_{5(2t)} = r_{5(2t-1)} = \frac{3^{t-1}+1}{2}。$$

$$(5) \quad a_{tt}^{(m)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(m)} + \sum_{k=1}^{t-2} a_{(t-k)(t-k)}^{(m-2)} a_{kk}^{(m)}, \quad m \geq 5; \text{ 可得 } \langle a_{tt}^{(m)} \rangle \text{ 的生成函數的關係式}$$

$$f_{m+2}(x) = \left(\frac{x}{1-2x-xf_m(x)} \right)。$$

$$(6) \quad a_{tt}^{(6)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(6)} + \sum_{k=1}^{t-2} \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^t + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^t \right) (a_{kk}^{(6)})$$

$$\approx 0.10757 \times 3.24696^t + 0.34930 \times 1.55497^t + 0.54313 \times 0.19806^t, \text{ 即}$$

$$r_{6(2t)} = r_{6(2t-1)} \approx 0.10757 \times 3.24696^t + 0.34930 \times 1.55497^t + 0.54313 \times 0.19806^t。$$

$$(7) \quad a_{tt}^{(7)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(7)} + \sum_{k=1}^{t-2} \frac{3^{t-1}+1}{2} a_{kk}^{(m)} = \frac{1}{4} (2^t + (2+\sqrt{2})^{t-1} + (2-\sqrt{2})^{t-1})。$$

$$(8) \quad \langle a_{tt}^{(\infty)} \rangle \text{ 的生成函數的關係式 } f(x) = -1 + \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}。$$

二、 討論

(一) 終點位置

我們首先將旋轉方塊的實體模型逐步簡化為左下右上點的連接圖，進而探究以 L_{11} 作為起點，何點可以作為終點。在 2×2 、 2×3 、 2×3 階旋轉方塊中，我們發現並定義了構造 S 和順、逆時針迴圈，並發現旋轉方塊是由順、逆時針互相交錯，構造 S 連結組成。藉此得知，在 $m \times n$ 階旋轉方塊中，由起點 L_{11} 進入後，僅能以 R_{1n} 、 L_{m1} 兩點作為終點。

(二) 最短路線方法數

1. 圖形觀察

藉由圖形觀察，我們先找到 $2 \times n$ 、 $m \times 2$ 階旋轉方塊的簡化圖形，進而推得 $n \times n$ 階以及 $m \times n$ 階旋轉方塊的簡化圖形。利用已知圖形，我們便可以在計算最短路線數時觀看特定方向的路段，利用加法原理推得最短路線數。此外，藉由圖形觀察也直接得到在 $2 \times n$ 、 $m \times 2$ 階旋轉方塊中到兩終點的最短路徑數。

2. l_{mn} 和 r_{mn} 的關係

我們觀察起點到終點 R_{mn} 和另一終點位置的關係。在起點位置、道路方向不變的情況下，將旋轉方塊鏡射並加一橫列調整，得到關係式 $r_{mn} = l_{(n+1)m}$ 。我們得知只需要求得抵達其中一終點的最短路線數，即可求得另一終點的最短路線數。

3. 旋轉方塊的行列相同

在行、列數相同的旋轉方塊中，透過已知的圖形規律性，利用加法原理得到過程中 $a_{st}^{(\infty)}$ 的遞迴關係式，並利用數學歸納法證明得到 $a_u^{(\infty)}$ 遞迴關係式。又利用其遞迴關係式，我們可得生成函數。此外，我們更於參考資料(2)中發現 $\langle a_u^{(\infty)} \rangle$ 即為卡特蘭數。

4. 旋轉方塊的行列不同

得到簡化圖形規律性後，我們利用加法原理得到過程中 $a_{st}^{(3)}$ 、 $a_{st}^{(4)}$ 、 $a_{st}^{(5)}$ 的遞迴關係式，並利用數學歸納法證明 $a_u^{(3)}$ 、 $a_u^{(4)}$ 、 $a_u^{(5)}$ 得到其遞迴關係式。再者，我們發現 $a_u^{(5)}$ 的遞迴關係式有 $a_u^{(3)}$ 的一般式，因而著手探究 $\langle a_u^{(m)} \rangle$ 和 $\langle a_u^{(m+2)} \rangle$ 的關係。透過「係數圖」的推導，我們發現 $a_u^{(m+2)}$ 分解過程的係數為 $a_u^{(m)}$ ，即得利用數學歸納法得到其關係式。

接著，我們嘗試求行列不同的旋轉方塊中最短路徑數一般式。透過已知的遞迴關係式，我們利用生成函數推導其冪級數，進而得到 $\langle a_u^{(4)} \rangle$ 、 $\langle a_u^{(5)} \rangle$ 的一般

式。然而在 $m \geq 6$ 時，雖能得到生成函數的 f_{m+2} 和 f_m 的關係式，但尚未能將其轉換為一般式，討論如下：

由遞迴關係式 $a_u^{(m+2)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{m+2} + \sum_{k=1}^{t-2} a_{(t-k)(t-k)}^{(m)} a_{kk}^{m+2}$ ， $m \geq 5$ ，進而得到 $\langle a_u^{(m)} \rangle$ 和 $\langle a_u^{(m+2)} \rangle$ 的生成函數之間的關係：

$$f_{m+2}(x) = \left(\frac{x}{1 - 2x - xf_m(x)} \right)。$$

然而在將其轉換為一般式時，我們可以推得 $f_m(x)$ 的一般式為分子、分母均為 $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ 次多項式的分式，但當 $m \geq 6$ 時，分母的次數大於 2 次，除非透過繪圖軟體畫出圖形再找出根的近似值，否則不易判斷是否能將分母分解成實係數一次因式，因此雖然得到其生成函數，但仍難展開成幕級數以獲得各項的係數，因此尚無能力寫出 $a_u^{(m)}$ 的一般式。

5. 卡特蘭數的生成函數

我們假設當 $m \rightarrow \infty$ 時， $f_m(x) \rightarrow f(x)$ ，便可由 $f_m(x)$ 和 $f_{m+2}(x)$ 關係式得到

$$f(x) = \left(\frac{x}{1 - 2x - xf(x)} \right)，利用此式所得到的。而經由轉換後，我們更發現得到的$$

$$f(x) = \frac{1 - 2x - \sqrt{1 - 4x}}{2x}，與利用 \langle a_u^{(m)} \rangle 的遞迴關係得到的生成函數是相同的，此$$

生成函數即為卡特蘭數的生成函數。

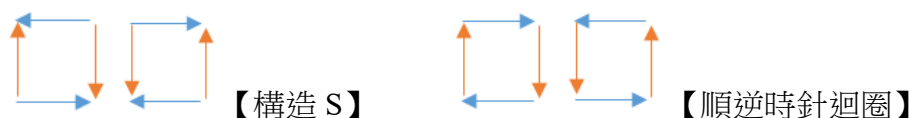
肆、 結論與應用

一、 未來展望

(一) 總路線數的計算

得知最短路線數後，我們亦期望求得總路線數。經由路線精簡，我們得知旋轉

方塊是由構造 S 和順、逆時針迴圈組成。而且，我們可以進一步推衍其行走規則：走經構造 S 時，至多經過其兩條平行箭頭（即兩條藍色或是兩條橘色）；而走經迴圈時，為了不重複計算已走過的路線，則至多經過其三條相連箭頭。

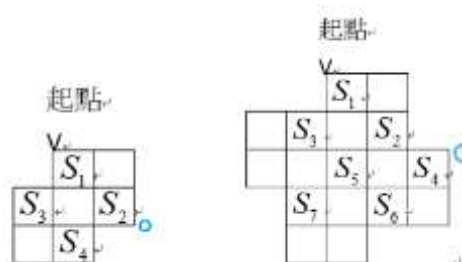


也因此，我們可以透過已知的圖形，計算路線中走過幾條構造 S 的箭頭得知總路線數。定義在某路線中走經構造 S 內藍色（橫向）箭頭數量為 S 、橘色（縱向）箭頭數量為 S' ，可知在不討論邊界情況時，每個構造 S 中符合 $0 \leq S, S' \leq 2$ ，且 S, S' 必有一項為零。而我們又知道每一個圖形中有幾個構造 S ，便可以分別討論出總路線數。

舉例而言：在 2×2 階旋轉方塊中，在計算通往右邊終點的總路線數時，我們首先忽略 S_3 （因為構造 S 和左邊終點有相關，而和右邊無關）以及 S_4 （從起點出發繪圖時不會存在）。因此共剩兩個構造 S ，由於由起點出發後和抵達終點前皆分別會經過一個構造 S ，因此可得 $1 \leq S_1 + S'_1$ 且 $1 \leq S_2 + S'_2$ ，又綜合行走規則可得知

$2 \leq S_1 + S'_1 + S_2 + S'_2 \leq 4$ 。因此可以求得到右邊終點的總路線數共有 4 條：

$$(S_1, S'_1, S_2, S'_2) = (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (2, 0, 2, 0), (0, 2, 0, 2)。$$



【 2×2 示意圖】

【 3×3 示意圖】

然而，當圖形規模擴大，討論總路線數時， S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 等將互相限制對方。舉 3×3 階旋轉方塊圖形為例。我們省略了不必要的構造 S 後，剩下 7 個構造

S。考慮起點開始、終點結束，因此得 $1 \leq S_1 + S_1'$ 且 $1 \leq S_4 + S_4'$ 。綜合上述可知

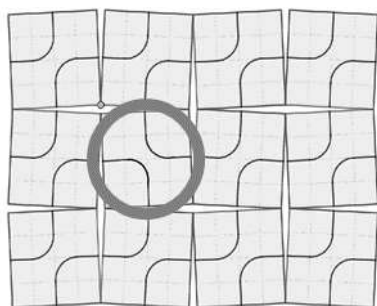
$3 \leq S_1 + S_1' + S_2 + S_2' + \dots + S_7 + S_7' \leq 14$ 。然而由於其內部潛在關係限制，因此我們仍舊沒有能力解開。舉例而言，當 $S_1=2$ 時， $S_2 + S_2' \geq 1$ 且 $S_3 + S_3' \geq 1$ ，因此無法考慮上述值為0的情況。而規模擴大後，潛在關係限制繁複，因此我們尚未能解決此問題。

(二)旋轉方塊種類推廣

我們目前僅就同向雙勾形的道路做研究。然而，除了同向雙勾型的旋轉方塊，我們亦可討論不同向雙勾形的旋轉方塊，如【圖十九】。其土地中有一個以上的道路和整體方向不同的旋轉方塊。而在粗略的探究中，我們可以發現不同向雙勾形的旋轉方塊異於同向雙勾形旋轉方塊，其多了一些新的元件，也因此需要額外討論。

舉 2×2 階旋轉方塊為例，我們可以發現兩個新的元件：

1. 「小圈」：由二橋和二路直接連接而成。其沒有方向性，因此即使根據遊戲規則不回頭走，在廣義討論中出現迴圈的情況下，仍舊可以改變迴圈方向，因而可推斷其會影響終點位置。
2. 「阻隔」：由兩個以上同向路組成的。舉此例而言，相較於同向雙勾型的旋轉方塊有兩個終點，不同向雙勾型的旋轉方塊中的「阻隔」將使終點數減為一個。因此可推斷此元件會獨立於其他道路和橋，導致於可行終點數減少。



【圖十九】



【小圈】



【阻隔】

二、 結語

本篇研究由旋轉方塊的路、橋定義作為開頭，在研究中逐漸簡化複雜的實體，並發現如構造S和順、逆時針迴圈等元件，透過這些元件的討論思索可能的終點位置。而後，

在最短路線數的討論上，我們首先了解到抵達兩個終點的關係，接著發現 $n \times n$ 階旋轉方塊中，最短路徑數數列為卡特蘭數。了解 $m \times n$ 階旋轉方塊中最短路徑數的遞迴關係式外，我們亦找到之間的遞迴關係式，進而可推得所有規格的最短路線數。另一方面，在一般式推廣的部分，我們則發現了生成函數的遞迴關係式，將其取極限後再度得到卡特蘭數的一般式。然而，除了尋找最短路線數的一般式外，此題目仍尚有很大的發展空間。無論是在總路線數的討論或是道路的變換，都可以做為未來研究的課題。

伍、 參考文獻

1. 普通高級中學數學，第二冊（2012）。新北市：翰林。
2. 組合數學-2 版(2012)，曹汝成。廣州：華南理工大學出版社。
3. Liu. C. L. (1969). *Introduction to Combinatorial Mathematics*. NY:McGraw-Hill.

【評語】 010027

本問題由遊戲出發，探討一個特殊網路拓樸，「路」，「橋」交錯可以到達的終點位置，並估算最短路徑的數量。主要的解題技巧，是將問題畫成 $m \times n$ 的方格圖形，觀察出 S 結構、迴圈、明顯路徑等等特徵，並使用遞迴數列以及特徵函數去求解。就思路來講，清晰明瞭、也很合理。但是，有一個重要問題。在化成 $m \times n$ 階方格時，每一組不同 m 和 n 都會對應到不同結構的方格，但是在之後的分析，這些拓樸特徵卻沒扮演任何角色，而且作者可以令 m 趨近無窮大(作品說明書 page 18)，比較奇怪! 這些不同結構的方格，造成複雜的邊界，應該不易處理才對。因此作者僅能夠處理跟邊界無關的最短路徑，對於更重要的問題：求所有路徑數，還是無法解決。建議作者能夠就這一點去努力改進。